Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
AL210 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 9 - 29 Novembre 2010
Tutore: Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Sia K un campo, $\alpha \in K$ e $f(x) \in K[x]$, dimostrare che:

- $\varphi : K[x] \longrightarrow K$ t.c. $\varphi(f(x)) = f(\alpha)$ è un ben definito omomorfismo, determinarne il nucleo e immagine
- Stabilire per quali $I = (f(x))$ il quoziente $A = \frac{K[x]}{I}$ è integro
- Dimostrare che A ammette elementi nilpotenti non banali (ovvero $Nil(A) \neq \{0\}$) $\iff$ $MCD(f(x), f'(x)) \neq 1$

Esercizio 2.
Sia $\alpha \in \mathbb{Z}$ e sia $\varphi_\alpha := \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ t.c. $\varphi_\alpha(f(x)) = f(\sqrt{\alpha})$,dimostrare che:

- φ é un omomorfismo e $(x^2 - \alpha) \subseteq Ker(\varphi)$
- Sia $Im(\varphi_\alpha) = \mathbb{Z}[\sqrt{\alpha}] := \{a + b\sqrt{\alpha} \quad t.c. \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$ dimostrare che $Im(\varphi_\alpha) = \mathbb{Z} \iff \alpha$ è un quadrato perfetto

Esercizio 9.
Verificare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi di anelli e determinarne nucleo ed immagine, dire inoltre se il nucleo è un ideale primo o massimale:

(a) $\phi : \mathbb{R}[X, Y] \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\phi(f(X, Y)) = f(0, 0)$;

(b) $\phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ t.c. $\phi(f(X)) = f(2 + i)$.

(c) $\phi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}$ t.c. $\phi(f(X)) = f(0)$;

(d) $\phi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ t.c. $\phi(f(X)) = \overline{f(0)}$;

(e) $\phi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ t.c. $\phi(\sum a_i X^i) = \sum \overline{a_i}$;

(f) $\phi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ t.c. $\phi(f(X)) = f(i)$;

(g) $\phi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\phi(f(X)) = f(\sqrt[3]{2})$;