Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TN 1
Tutorato 7 - 2 maggio 2006

1. Dati p e $q = 4p + 1$, entrambi numeri primi, dimostrare che ogni intero a che non è un residuo quadratico di q è una radice primitiva di q oppure $ord_q(a) = 4$.

2. Determinare, in funzione di λ, con $0 \leq \lambda \leq 10$, quando la congruenza quadratica
$$3X^2 + 7X + 3\lambda + 9 \equiv 0 \pmod{11}$$
è risolubile e, per ciascun λ per il quale la congruenza è risolubile, determinare tutte le soluzioni.

3. Sia $p = 23$, sia $a \geq 1$ e sia $S(a) = \{Ka : 1 \leq k \leq 11\}$.
   (a) Determinare, per a = 5, 9, 10, 11, l'insieme N(a) degli elementi di S(a) che hanno resto, nella divisione per p, compreso tra $(p + 1)/2$ e $p - 1$.
   (b) Determinare $v(a) := $ cardinalità (N(a)).
   (c) Verificare che $r = -2$ è una radice primitiva (mod 23), calcolare $ind_r(a)$ per a = 5, 9, 10, 11 e verificare che $v(a) \equiv ind_r(a) \pmod 2$.
   (d) Calcolare il simbolo di Legendre (a/p) per a = 5, 9, 10, 11.

4. Usando la LRQ (Legge di Reciprocità Quadratica di Gauss) determinare i primi p per i quali -5 è un residuo quadratico.

5. Usando la LRQ, calcolare il simbolo di Legendre: (131/991).

6. Determinare in funzione di λ, con $0 \leq \lambda \leq 6$, quando la congruenza quadratica $X^2 + 5X + \lambda \equiv 0 \pmod 7$ è risolubile.
   Per ciascun valore di λ, con $0 \leq \lambda \leq 6$, per il quale la congruenza è risolubile determinare tutte le sue soluzioni.

7. Determinare per quali primi p la congruenza $X^4 + 1 \equiv 0 \pmod p$ ha soluzioni.

8. Determinare tutte le eventuali soluzioni della congruenza quadratica: $3X^2 + 2X + 3 \equiv 0 \pmod{33}$.

9. Calcolare (-26/73); (19/73); (33/73).

10. Dimostrare che esistono infiniti primi p della forma $p = 4k + 1$ e della forma $p = 8k - 1$.