Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TN1
Tutorato 9 - 16 maggio 2006

1. **(a)** Calcolare il simbolo di Jacobi: $(7+\lambda / 253)$ per ogni λ, con $0 \leq \lambda \leq 2$ (si noti che $11 \mid 253$).
(b) Determinare, in funzione di λ con $0 \leq \lambda \leq 2$, le eventuali soluzioni della congruenza: $X^2 \equiv 7 + \lambda$ (mod 253).

2. **(a)** Dati due interi positivi a ed n, con MCD (a, n) = 1, descrivere quali relazioni intercorrono fra il valore del simbolo di Jacobi (a/n) e la risolubilità della congruenza $X^2 \equiv a$ (mod n).
(b) Calcolare il simbolo di Jacobi (33/91).
(c) Determinare tutte le eventuali soluzioni della congruenza $X^2 \equiv p$ (mod q), al variare degli interi primi p e q, tali che $p \mid 33$ e $q \mid 91$.
b
3. **(a)** Calcolare il simbolo di Jacobi: $(3 + \alpha /299)$ per ogni α, con $0 \leq \alpha \leq 2$ (si noti che $13 \mid 299$).
(b) Determinare le eventuali soluzioni della congruenza: $X^2 \equiv 5$ (mod 299).

4. Determinare se la seguente congruenza è risolubile ed eventualmente trovarne tutte le soluzioni:
$3X^2 + 4X + 2 \equiv 0$ (mod 33).

5. Trovare tutte le eventuali soluzioni della congruenza $9X^2 - 12X\lambda + 4\lambda^2 + 4 - \lambda \equiv 0$ (mod 13), al variare di λ, $0 < \lambda < 12$.

6. (a) Dimostrare che se (x, y, z) è una terna pitagorica (con $x^2+y^2=z^2$), allora $3|xy$.
(b) Descrivere tutte le eventuali terne pitagoriche primitive positive che determinano un triangolo rettangolo con area A=30.

7. Dimostrare che:
   (a) Un intero positivo n è differenza di due quadrati (cioè, $n= a^2 - b^2$ con $a, b \geq 0$) se e soltanto se è prodotto di due fattori interi entrambi pari o entrambi dispari.
   (b) Sia n un intero positivo pari. Allora n è differenza di due quadrati se e soltanto se n è divisibile per 4.
   (c) Se un intero positivo n è differenza di due quadrati, allora n non può essere della forma $4k + 2$, per un qualche $k \geq 0$.

8. Mostrare che se $p \equiv 9$ mod 28, allora $(7/p) = 1$.

9. Sia $\omega(n)$ il numero di divisori primi distinti dell'intero n. Mostrare che per ogni numero complesso z, la funzione $f_z(n) := z^{\omega(n)}$ è moltiplicativa. Nel caso in cui $z = i$, calcolare $(f_z * \mu)(60)$.

10. Elencare tutte le terne pitagoriche primitive e positive (x, y, z) con $x,y,z \leq 85$.