Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TN 1
Seconda prova di valutazione intermedia - 31 maggio 2006

Nome: .... Identificativo:............................

NOTA: Svolgere gli esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni. **E' consentito l'uso della calcolatrice.** Non è consentito l'uso di libri e appunti.

Esercizio 1. Si consideri la congruenza quadratica

$$(\lambda + 1)X^2 + 5X + \lambda - 1 \equiv 0 (\text{mod } 17).$$

(a) Determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{Z}$ tale congruenza ha soluzione.

(b) Risolvere la congruenza data per il più piccolo $\lambda \geq 0$, $\lambda \neq 1$, per cui ha soluzione.

Esercizio 2.

(a) Dare la definizione di simbolo di Jacobi.

(b) Che informazioni dà il simbolo di Jacobi sulla risolubilità di una congruenza quadratica del tipo $X^2 \equiv a (\text{mod } n)$?

(c) Calcolare il simbolo di Jacobi $\left(\frac{977}{89335}\right)$ (sapendo che 977 e 1051 sono numeri primi).

(d) Determinare se la congruenza quadratica $X^2 \equiv 977 (\text{mod } 89335)$ ha soluzione.

Esercizio 3. Si consideri la funzione moltiplicativa $F = \tau * \varphi$.

(a) Calcolare $F(35)$ e $F^{-1}(35)$.

(b) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare $f(35)$.

Esercizio 4.

(a) Determinare quali dei seguenti numeri sono somma di due quadrati (giustificando la risposta).

   (i) 3895
   (ii) 1664
   (iii) 4797

(b) Scrivere tali numeri come somma di due quadrati.

Esercizio 5. Un numero naturale m si dice perfetto se è la somma dei suoi divisori positivi (escluso m), cioè se $\sigma(m) = 2m$. Vogliamo dimostrare che i numeri perfetti pari sono esattamente i numeri della forma $2^{n-1}p$ dove $n \in \mathbb{N}$ e $p = 2^n - 1$ è un numero primo.

(a) Dimostrare che $\sigma(2^{n-1}) = 2^n - 1$.

(b) Sia n un numero naturale tale che $p := 2^n - 1$ sia un numero primo, e sia $a = 2^{n-1}p$. Dimostrare che a è un numero perfetto.

(c) Sia $m \in \mathbb{N}$. Dimostrare che se $\sigma(m) = m + k$ con $k < m$ e $k \mid m$, allora $k = 1$ e m è un numero primo.

(d) Sia m un numero perfetto pari, $m = 2^{n-1}r$, con r dispari. Sia $\sigma(r) = r+k$. Dimostrare che $(2^n - 1)(r + k) = 2^n r$.

(e) Utilizzando il punto (c), dedurne che r è un numero primo e $r = 2^n - 1$.