Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TN 1
Recupero della seconda prova di valutazione intermedia - 16 giugno 2006

NOTA: Svolgere gli esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni. **E' consentito l'uso della calcolatrice.** Non è consentito l'uso di libri e appunti.

Esercizio 1. Si consideri la congruenza quadratica

$$\lambda X^2 + (2\lambda + 1)X + 1 \equiv 0 (\bmod 11).$$

(a) Determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{Z}$ tale congruenza ha soluzione.

(b) Risolvere la congruenza data per il più piccolo $\lambda \geq 0$ per cui ha due soluzioni distinte.

Esercizio 2.

(a) Dare la definizione di simbolo di Legendre.

(b) Sapendo che 887 e 1021 sono numeri primi determinare se la seguente congruenza ha soluzione:

$$X^2 \equiv 887 (\bmod 1021)$$

Esercizio 3. Si considerino le funzioni aritmetiche ω e Ω così definite: se $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$ (con $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$),

$$\omega(n) := r$$

$$\Omega(n) := e_1 + e_2 + \dots + e_r.$$

(a) Determinare se ω e Ω sono funzioni moltiplicative.

(b) Sia λ la funzione aritmetica definita da $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$. Dimostrare che λ è totalmente moltiplicativa.

(c) Dimostrare che

$$\lambda \star \mathbf{1}(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è un quadrato perfetto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(d) Sia $F = \lambda \star \mathbf{1} \star \sigma$. Determinare $F(44)$ e $F^{-1}(44)$.

(e) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare $f(44)$.

Esercizio 4.

(a) Determinare quali dei seguenti numeri sono somma di due quadrati (giustificando la risposta).

   (i) 10829

   (ii) 704

(b) Scrivere tali numeri come somma di due quadrati.

(c) Determinare una terna pitagorica (x, y, z) con $z = 10829$.