Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2005/2006
AC1 - Analisi Complessa
Tutorato 1
Giovedì 2 Marzo 2006

1. Esprimere i seguenti numeri complessi nella forma $x+iy$, dove x e y sono numeri reali:
   (a) $(1+2i)^3$
   (b) $\frac{5}{-3+4i}$
   (c) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$
   (d) $e^{-i\pi/2}$
   (e) $(1+i)^{100}$
2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $z^6+1=0$.
3. Dire se le seguenti funzioni sono olomorfe su $D(0,1)$, il disco aperto di centro 0 e raggio 1:
   (a) $f(z)=z^6+\frac{1}{5-z^2}$
   (b) $f(x+iy)=\frac{x-1-iy}{x^2+y^2-2x+1}$
   (c) $f(z)=\overline{z}$
   (d) $f(z)$ t.c. $Im(f(z))=0$
   (e) $f(z)$ t.c. $Re(f(z))=0$
   (f) $f(z)$ t.c. $\arg(f(z))=\theta$, con θ costante, $\theta\in[0,2\pi[$
4. Dimostrare che se $f(z)$ è una funzione olomorfa su un aperto $\Omega\subset\mathbb{C}$ e $f'(z)=0$ per ogni $z\in\Omega$, allora f è costante.
5. Siano z_n dei numeri complessi t.c. $Re(z_n)\geq 0$. Supponiamo che $\sum_{i=1}^{\infty}z_n$ e $\sum_{i=1}^{\infty}z_n^2$ convergono. Dimostrare che allora converge anche la serie $\sum_{i=1}^{\infty}|z_n|^2$.
6. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)^2}$
   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty}n!z^{n!}$
   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty}n^n z^{n^2}$
   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}$
7. Studiare la convergenza (puntuale, assoluta, uniforme) delle serie dell'esercizio precedente.
8. E' stato dimostrato a lezione che date $\sum_{i=1}^{+\infty}a_nz^n$ e $\sum_{i=1}^{+\infty}b_nz^n$ due serie di potenze con raggio di convergenza rispettivamente R_a e R_b, allora il raggio di convergenza R della serie $\sum_{i=1}^{+\infty}a_nz^n\cdot\sum_{i=1}^{+\infty}b_nz^n$ è maggiore o uguale a $\min\{R_a,R_b\}$. Trovare un esempio in cui $R>\min\{R_a,R_b\}$.