Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2005/2006
AC1 - Analisi Complessa
Tutorato 3
Giovedì 23 Marzo 2006

Notazione: dati $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}^+$, $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \; t.c. \; |z - z_0| < r\}$ e $S(z_0, r) := \partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \; t.c. \; |z - z_0| = r\}$.

1. (a) Sia g una funzione analitica su $\overline{D(0,1)}$ (i.e.: f è analitica su un aperto U t.c. $\overline{D(0,1)} \subset U$). Sia $r := \max_{S(0,1)} |g(z)|$. Dimostrare che $\forall z \in \overline{D(0,1)}$ $|g(z)| \leq r$.
   (b) Sia f una funzione analitica su $\overline{D(0,1)}$ t.c. $f(\overline{D(0,1)}) \subseteq \overline{D(0,1)}$ e t.c. $f(0) = 0$. Dimostrare che $\forall z \in \overline{D(0,1)}$ $|f(z)| \leq |z|$.
   (c) Sia ora f analitica su $D(0,1)$ e t.c. $f(D(0,1)) \subseteq D(0,1)$ e t.c. $f(0) = 0$. Dimostrare che $\forall z \in D(0,1)$ $|f(z)| \leq |z|$

2. Sia f una funzione analitica su un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{C}$ t.c. $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, $r > 0$. Supponiamo che $|f(z)|$ sia costante su $S(a,r)$. Dimostrare che o $f(z)$ ha uno zero in $D(a,r)$ o f è costante.

3. Calcolare $\int_\gamma Re(z)dz$, dove $\gamma(t) = (1+i)t$ con $0 \leq t \leq 1$.

4. Calcolare $\int_\gamma \overline{z}^2$ dz, dove γ è il perimetro del quadrato di vertici $0, i, 1+i, 1$ percorso una volta in senso orario.

5. Si considerino le curve $\gamma_1(t) := 1+it$, $\gamma_2(t) := e^{-\pi it}$, $\gamma_3(t) := e^{\pi it}$, $\gamma_4(t) := 1 + it + t^2$ $(0 \leq t \leq 1)$ e le funzioni $f_1(z) = z^3$, $f_2(z) = \overline{z}$, $f_3(z) = 1/z$. Calcolare $\int_{\gamma_i} f_j(z)dz$ per ogni i, j.

6. Sia γ la circonferenza $S(0,1)$ percorsa una volta in senso antiorario. Calcolare $\int_\gamma Re(z)dz$ in due modi:
   (a) parametrizzando la curva
   (b) osservando che $Re(z) = \ldots$ e usando i conti già fatti nell'esercizio precedente.

7. Sia f olomorfa su una curva chiusa γ (i.e.: f è olomorfa su un aperto che contiene γ). Dimostrare che $\int_\gamma \overline{f(z)} f'(z)dz$ è un numero puramente immaginario. (Dare per scontata la continuità di $f'(z)$).

8. Sia $\gamma(t) := e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Trovare un'opportuna funzione olomorfa f su $S(0,1)$ t.c. $f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \cos^{10}(t)$. Utilizzare tale funzione per calcolare l'integrale reale $\int_0^{2\pi} \cos^{10}(t)dt$. Notare che tale procedimento può essere generalizzato per calcolare ogni integrale del tipo $\int_0^{2\pi} P(\cos t, \sin t)dt$, dove P è un polinomio.