Tutorato 4

Notazione: dati $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}^+$, $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}\ t.c.\ |z - z_0| < r\}$ e $S(z_0, r) := \partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\ t.c.\ |z - z_0| = r\}$.

1. Calcolare i seguenti integrali lungo la curva specificata:
   (a) $\int_\gamma |z|^2 dz$, dove γ è il perimetro del quadrato di vertici $0, i, 1+i, 1$ percorso una volta in senso antiorario.
   (b) $\int_\gamma (|z|^3 + |z| + \overline{z}^2) dz$, dove γ è la circonferenza $S(0,1)$ percorsa due volte in senso antiorario.
   (c) $\int_\gamma (2|z|^2 + z^2 + \overline{z}^2) dz$, dove $\gamma(t) = t + it^2$, $t \in [0,1]$.
   (d) $\int_\gamma (Re(z) + \sin(z)) dz$, dove $\gamma(t) = t + i\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (e) $\int_\gamma z e^{(z^2)} dz$, dove γ è il segmento tra i e $-i + 2$.
   (f) $\int_\gamma (\frac{1}{z} + e^z + \sin(z) + \frac{1}{z^9}) dz$, dove γ è la circonferenza $S(0,1)$ percorsa tre volte in senso orario.
   (g) $\int_\gamma \frac{1}{iz} \left(\frac{z + (1/z)}{2}\right)^{100} dz$, dove $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (h) $\int_\gamma \overline{e^{z}} dz$ dove γ è il perimetro del quadrato di vertici $0, i, 1+i, 1$ percorso una volta in senso antiorario.
   (i) $\overline{\int_\gamma e^z dz}$ dove γ è il perimetro del quadrato di vertici $0, i, 1+i, 1$ percorso una volta in senso antiorario.
   (j) $\int_\gamma \frac{z}{\overline{z}} dz$ dove $\gamma = \partial\Omega$ è il cammino chiuso che racchiude il dominio $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2,\ Im(z) > 0\}$ percorso una volta in senso antiorario (ovvero, muovendosi lungo γ, Ω rimane a sinistra).

2. Sia Ω un aperto stellato di $\mathbb{C}$, ovvero: esiste un punto $z_0 \in \Omega$ t.c. ogni segmento tra z_0 e qualsiasi altro punto di Ω è anch'esso contenuto in Ω. Dimostrare che Ω è semplicemente connesso.

3. Sia $\Omega := D(0, a) - \overline{D(0, b)}$ con $a > b > 0$ numeri reali, ovvero Ω è una corona circolare aperta, centrata nell'origine, di raggio maggiore a e raggio minore b. Dimostrare che Ω non è semplicemente connesso.

4. Sia $S \subset \mathbb{C}$ il segmento di estremi a, b con $a \leq 0 \leq b$ numeri reali. Dimostrare che $\Omega := \mathbb{C} - S$ non è semplicemente connesso.

5. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando la risposta:
   (a) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge per $z = 1$ allora converge per ogni z t.c. $|z| = 1$.
   (b) Sia f olomorfa su $\mathbb{C}$. Se $Re(f(z)) = Im(f(z))$ per ogni z, allora f è costante.
   (c) Sia f analitica su Ω aperto connesso. Se $|f|$ ha un minimo locale allora f è costante.
   (d) Sia f analitica su $\mathbb{C}$, non nulla. L'insieme degli zeri di f è contabile (i.e.: finito o numerabile).
   (e) Sia f olomorfa su $\mathbb{C}$. Se $\int_\gamma f = 0$ per ogni cammino chiuso γ allora f è la funzione nulla.