

AC1 Analisi Complessa

A.A. 2005/2006

Edoardo Sernesi

Derivabilità in senso complesso. Funzioni olomorfe. Proprietà fondamentali elementari delle funzioni olomorfe. Le equazioni di Cauchy-Riemann. Le applicazioni olomorfe a derivata non nulla preservano gli angoli.

Serie di potenze formali e loro proprietà. Successioni e serie di numeri complessi e loro convergenza. Successioni e serie di funzioni a valori complessi. Convergenza semplice, assoluta, uniforme. Criterio del confronto. Il raggio di convergenza di una serie di potenze. Il criterio della radice. Operazioni razionali sulle serie convergenti producono serie convergenti. Convergenza della derivata termine a termine di una serie convergente e della sostituzione di una serie convergente in un'altra anch'essa convergente.

Funzioni analitiche. Principali proprietà. Le funzioni analitiche sono olomorfe. La funzione esponenziale. Le funzioni circolari. Il logaritmo complesso. Ordine di una funzione analitica e sue proprietà. Il principio del prolungamento analitico. Principio di identità delle funzioni analitiche. La serie binomiale. L'inversa formale: esistenza, unicità e convergenza.

Isomorfismi analitici e isomorfismi analitici locali. Relazione tra annullamento della derivata e proprietà di isomorfismo analitico locale. Il teorema dell'applicazione aperta. Il principio del massimo modulo locale. Applicazione al teorema fondamentale dell'algebra.

Curve e archi in \mathbf{C} e loro proprietà. Proprietà della distanza di una curva dal complementare di un aperto. Omotopia di curve continue. Esempi. Insiemi convessi. Insiemi semplicemente connessi. Il complementare di 0 non è semplicemente connesso.

Integrale indefinito e integrale definito di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato a valori in \mathbf{C} . Integrale di una funzione continua lungo un arco e sue proprietà. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una primitiva in termine di integrali lungo archi chiusi. Il teorema di Goursat. Esistenza di primitive in un disco. Invarianza dell'integrale di una funzione olomorfa se esteso a curve vicine con gli stessi estremi o a curve chiuse vicine. La versione omotopica del teorema di Cauchy. La formula integrale di Cauchy. Analiticità delle funzioni olomorfe. Il teorema di Liouville. Applicazione al teorema fondamentale dell'algebra. Il teorema di Morera. Esistenza di primitive locali e globali. Determinazioni del logaritmo.

Serie di Laurent. Sviluppo in serie di Laurent nell'intorno di una singolarità isolata. La parte principale dello sviluppo di Laurent. Classificazione delle singolarità isolate. Caratterizzazione delle singolarità eliminabili. Singolarità polari e loro proprietà. Fun-

zioni meromorfe. Singolarità essenziali. Il teorema di Casorati-Weierstrass. Esempi.

Residui. Espressione del residuo come integrale lungo una circonferenza. Indice di un arco chiuso rispetto a un punto. L'indice è un numero intero. L'indice è costante sulle componenti connesse del complementare della curva. Il teorema dei residui. Metodi pratici per il calcolo dei residui. Esempi. La derivata logaritmica. Il teorema dell'indicatore logaritmico. Residuo all'infinito. Applicazione al teorema fondamentale dell'algebra. Il teorema di Rouché. Applicazioni.

Calcolo di alcune classi di integrali definiti con il metodo dei residui: integrali impropri di funzioni razionali, integrali trigonometrici, integrali di funzioni della forma $f(z)e^{iz}$.

Serie e successioni di funzioni olomorfe. Convergenza uniforme e normale. Teoremi di esistenza del limite di successioni e di serie. Limite e somma delle derivate di una successione o di una serie. Serie di funzioni meromorfe. Convergenza uniforme e normale. Convergenza normale di $\sum_n \frac{1}{(z-n)^2}$ alla funzione

$$\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$$

Applicazione al calcolo di $\zeta(2)$, dove $\zeta(s)$ è la funzione zeta di Riemann.

TESTI CONSIGLIATI

- [1] SERGE LANG, *Complex Analysis*. Springer Verlag,
[2] EDOARDO SERNESI, *Analisi complessa*. Appunti scaricabili dalla pagina web del corso,

BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO