Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2005/2006
AC1 - Analisi Complessa
Tutorato 6
Giovedì 27 Aprile 2006

1. Sia $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

   (a) Se f è olomorfa su un aperto U dimostrare che dato che u, v verificano le equazioni di C.R. allora u, v sono funzioni armoniche su U (cioé $\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$, dove $\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$).

   (b) Sia $u = x^2$, $v = y^2$. Dove sono verificate le equazioni di C.R.? Come mai però $\nabla^2 u \neq 0$ sempre?

   (c) Sia $u = 2x(1-y)$. Dimostrare che u è armonica. Trovare una funzione v t.c. $u + iv$ sia intera.

2. Sia f una funzione intera non costante. Si dimostri che l'immagine di f è densa in $\mathbb{C}$.

3. Siano v, w due numeri complessi non nulli e tali che v/w non sia reale. Trovare un esempio di una funzione intera f non costante e periodica di periodo v (i.e.: $f(z+v) = f(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$). Dimostrare però che non è possibile trovare una funzione f intera non costante di periodo v e w (i.e.: $f(z+v) = f(z+w) = f(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$).

4. Delle seguenti funzioni trovare le singolarità e scrivere le serie di Laurent negli intorni delle singolarità:

   (a) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$

   (b) $(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$

   (c) $\frac{z-\sin z}{z^3}$

   (d) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$

   (e) $\sin(\pi - \frac{1}{z})$

5. Sia $U := \mathbb{C} - \{z : Im(z) = 0, Re(z) \leq 0\}$. Si fissi una determinazione del logaritmo su U. Sia $y > 0$. Trovare il limite $\lim_{y\to 0}(\log(a+iy) - \log(a-iy))$ sia per $a < 0$ che per $a > 0$.

6. Dimostrare che la derivata di una funzione meromorfa non ha poli semplici.

7. Dimostrare che la derivata di una funzione con una singolarità essenziale ha una singolarità essenziale.

8. Dimostrare che gli unici automorfismi analitici di $\mathbb{C}$ sono le funzioni $f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. (Sugg.: ridursi al caso degli automorfismi di $\mathbb{C}$ che fissano l'origine; definire $h(z) = f(1/z)$ e, utilizzando il teorema di Casorati-Weierstrass, dimostrare che h non può avere una singolarità essenziale in 0).