Università degli Studi Roma Tre
Corso di Studi in Matematica, a.a. 2011/2012
AC310 – Analisi complessa – Esercitazione 1
26 Settembre 2011

1. Sia z un numero complesso, indichiamo con $\mathrm{Re}(z)$ la sua parte reale e con $\mathrm{Im}(z)$ la sua parte immaginaria. Dimostrare che $\mathrm{Re}(z) = \frac{\bar{z}+z}{2}$ e $\mathrm{Im}(z) = i\frac{\bar{z}-z}{2} = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

2. Dare una interpretazione geometrica delle funzioni $f(z) = \frac{1}{z}$ e $g(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.

3. Dati due numeri complessi $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ dimostrare che
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

4. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}} = i$.

5. Siano $x,\ y,\ u,\ v \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{1}{x+iy} + \frac{1}{u+iv} = 1$. Determinare x ed y in funzione di u e v.

6. Determinare l'insieme dei punti z del piano complesso che soddisfano la condizione $\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Arg}(z + 1 - i) \leq \frac{7}{4}\pi$.

7. Dimostrare che se $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 1$, allora $(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = 1$.

8. Calcolare i termini fino al grado 6 dell'inversa della serie formale $\cos(T) = 1 - \frac{T^2}{2!} + \frac{T^4}{4!} - \frac{T^6}{6!} + \ldots$

9. Consideriamo la serie formale $e^T = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T^k}{k!}$ e la serie formale $\cos(T)$ definita come nell'esercizio precedente. Calcolare i termini fino al grado 4 della serie formale
$$\frac{e^T - \cos(T)}{T-2}.$$

10. Studiare la convergenza della serie di numeri complessi
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{n^\alpha}$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

11. Sia $f(T) = \sum a_n T^n$. Definiamo $f(-T) = \sum a_n (-1)^n T^n$. Diciamo che $f(T)$ è pari se $a_n = 0$ per ogni n dispari. Diciamo che $f(T)$ è dispari se $a_n = 0$ per ogni n pari.

    Dimostrare che f è pari se e solo se $f(T) = f(-T)$ e f è dispari se e solo se $f(-T) = -f(T)$.

12. Consideriamo la successione di numeri complessi $\{B_n\}$ definità dall'identità
$$\frac{T}{e^T - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} T^n,$$
    dove $e^T = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{n!}$. I B_n si dicono numeri di Bernoulli.

    a. Dimostrare la formula ricorsiva
$$\frac{B_0}{n!0!} + \frac{B_1}{(n-1)!1!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{1!(n-1)!} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

    b. Calcolare B_1, B_2, B_3, B_4.

    c. Mostrare che $B_n = 0$ per ogni n dispari maggiore di 1.