Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2011/2012
AC310
Seconda prova di valutazione in itinere – 19 Dicembre 2011

Esercizio 1 (6 punti). Senza utilizzare i residui calcolare

$$\mathbf{I} = \int_{C_3^-} \frac{2(\sin z + \cos z)}{z^2 - 4}$$

dove C_3^- è la circonferenza di centro l'origine e raggio 3 percorsa in senso orario.

Esercizio 2 (6 punti). Determinare lo sviluppo in serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^2 - 2z}$$

nella corona circolare $1 < |z| < 2$, e calcolarne il residuo in 0.

Esercizio 3 (6 punti). Calcolare:

$$\mathbf{I} = \int_{C_1} \frac{z^3 dz}{11z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 1}$$

dove C_1 è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 percorsa in senso antiorario.

Esercizio 4 (6 punti). Calcolare

$$\mathbf{I} = \int_{C_\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

dove $f(z) = \tan \pi z$ e C_π è la circonferenza di centro l'origine e raggio π percorsa in senso antiorario.

Esercizio 5 (6 punti). Enunciare e dimostrare il teorema di Casorati-Weierstrass.

Esercizio 6 (2 punti). Dare un esempio di una funzione con una singolarità isolata in un intorno di 0 tale che $\frac{1}{f}$ non abbia una singolarità isolata in 0. (Motivare la risposta)

Soluzioni

Esercizio 1. $\mathbf{I} = -2\pi i \sin 2$.

Esercizio 2.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^3 - z^2 - 2z} = \frac{1}{z(z+1)(z-2)} &= \frac{1}{z}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{3}\frac{1}{(z+1)}\right] \\
&= \frac{1}{z}\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right] \\
&= \frac{1}{z}\left[-\frac{1}{6}\sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{2^k} + \frac{1}{3}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{z^k}\right] \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^{k-1}}{z^k} - \frac{1}{6z} - \sum_{k\geq 1}\frac{z^{k-1}}{3\cdot 2^{k+1}}
\end{aligned}$$

$\mathrm{Res}_0(f) = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 3. Utilizzando il teorema di Rouché si verifica che tutte le radici del denominatore sono interne a C_1. Quindi l'integrale si può calcolare attraverso il residuo all'infinito. Si ottiene $\mathbf{I} = \frac{2}{11}\pi i$.

Esercizio 4. $\mathbf{I} = 2\pi i(7-6) = 2\pi i$.

Esercizio 6. $\sin\frac{1}{z}$ ha una singolarità isolata (essenziale) in 0 ma $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ possiede singolarità arbitrariamente vicine a 0 e q uindi non possiede una singolarità isolata in 0.