Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2011-2011 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

Tutorato 1
28 settembre 2011

1. Scrivere i seguenti numeri in forma esponenziale:

a) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

b) $2+4i$

c) $6-3i$

d) $(4+6i)^{-1}$

e) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2-\sqrt{3}\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$

f) $\sin\alpha - i\cos\alpha$

Soluzione.

a) $z=\sqrt{2}\exp(i\frac{3\pi}{4})$

b) $z=2\sqrt{5}\exp(\arctan(-2))$ (con $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$)

c) $z=3\sqrt{5}\exp(\arctan(\frac{1}{2}))$ (con $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$)

d) $z=\dfrac{1}{2\sqrt{15}}\exp\left(\arctan\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right)$ (con $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$)

e) $2\exp(\frac{5\pi}{4})$

f) $z=\exp(\alpha-\frac{\pi}{2})$

2. Trovare la parte reale ed immaginaria delle seguenti espressioni:

a) $\dfrac{z+4}{z}$

b) z^2

c) $\dfrac{z^3}{z-3}$

d) $\sin(z)$

Soluzione.

a) $\mathrm{Re}=1+\frac{4x}{x^2+y^2}$, $\mathrm{Im}=\frac{-4y}{x^2+y^2}$

b) $\mathrm{Re}=x^2-y^2$, $\mathrm{Im}=2xy$

c) $\mathrm{Re}=x^2-y^2-3x^3+9xy^2$, $\mathrm{Im}=2xy-9x^2y+3y^3$

d) $\mathrm{Re}=\cos(x)\sinh(y)$, $\mathrm{Im}=\cos(x)\sinh(y)$

3. Descrivere i seguenti insiemi del piano:

a) $\mathrm{Im}(z^2)>3$

b) $\mathrm{Re}(z^{-1})<0$

c) $z+4\overline{z}-3=0$

d) $|z+i|=3$

e) $\overline{z}=z^{-1}$

f) $\mathrm{Im}(\overline{z^2-\overline{z}})=2-\mathrm{Im}(z)$

Soluzione.

a) $\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) > 3$

b) $\operatorname{Re}(z) < 0$

c) Il punto $\frac{3}{5}$

d) La circonferenza di centro $-i$ e raggio $\sqrt{3}$

e) Il cerchio unitario.

f) L'iperbole $\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) = -1$.

4. Dimostrare che l'equazione $|z-a|+|z+a| = 2|c|$ ha soluzioni se e solo se $|a| \leq |c|$.

   Soluzione. L'equazione rappresenta un'ellisse, e $|a| \leq |c|$ è precisamente la sua condizione di esistenza.

5. Mostrare che, se z è sul cerchio unitario e $|a| > 4$, allora $z = \dfrac{z-a}{1-a\overline{z}}$

   Soluzione. $1 = z\overline{z}$; raccogliendo $\overline{z}$ al denominatore il membro di destra diventa $1/\overline{z} = z$ perché z è sul cerchio unitario. (L'ipotesi $|a| > 4$ può essere rimpiazzata da $a \neq z$: il suo unico scopo è permettere all'espressione di essere definita.)

6. Siano z e w numeri complessi. Dimostrare che l'area del triangolo Ozw è $\frac{1}{2}|\operatorname{Im}(z\overline{w})|$.

   Soluzione. Applicando una rotazione (ovvero moltiplicando i due numeri per un γ di norma unitaria) si può assumere z reale (né l'area, né l'espressione cambiano).

7. Trovare il limite delle seguenti successioni per $n \to \infty$:

   a) i^n

   b) $\dfrac{i^n}{n}$

   c) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}$

   d) $\dfrac{n+2i}{3n+7i}$

   e) $n\cos(\frac{n\pi}{2})+in\sin(\frac{n\pi}{2})$

   f) $\cos n + i\frac{1}{n}$

   Soluzione.

   a) Non ha limite

   b) 0

   c) 1

   d) $\frac{1}{3}$

   e) ∞

   f) Non ha limite.

8. Sia $\mathbb{C}[[X]]$ l'anello delle serie formali a coefficienti complessi.

   a) Mostrare che $\mathbb{C}[[X]]$ è un dominio d'integrità.

   b) Dimostrare che $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots$ è invertibile in $\mathbb{C}[[X]]$ se e solo se $a_0 \neq 0$.

c) Dedurne che l'ideale (X) è l'unico ideale massimale di $\mathbb{C}[[X]]$.

d) $\mathbb{C}[[X]]$ è un dominio euclideo?

e) Quali proprietà di $\mathbb{C}$ sono state usate?

Soluzione. Sia $\mathbb{C}[[X]]$ l'anello delle serie formali a coefficienti complessi.

a) Se $f \neq 0 \neq g$, siano a_n e b_m i coefficienti (rispettivamente di f e g) con n, m minori tra quelli diversi da 0. Allora fg ha il coefficiente di grado $n+m$ uguale a $a_n b_m \neq 0$.

b) Se $a_0 \neq 0$, si può costruire l'inverso coefficiente per coefficiente partendo da $b_0 = a_0^{-1}$.

c) Se $f = a_0 + \cdots \neq (X)$, $a_0 \neq 0$ e f è invertibile.

d) Basta prendere come valutazione l'*ordine* di f ($\mathrm{ord} f = \min\{n | a_n \neq 0\}$)

e) Solo l'essere un campo.

9. È vero che, se $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$? E se al posto di 0 c'è 1? (Nel caso la risposta sia negativa, fornire un contresempio.)

   Soluzione. Per 0, basta passare alla definizione di limite; per 1, un semplice controesempio è dato dalla successione che vale costantemente -1.