Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

TUTORATO 2
5 OTTOBRE 2011

1. Dare un esempio di due serie divergenti la cui somma converge.

   Soluzione. È sufficiente prendere una serie divergente $\sum a_n$ e il suo opposto $\sum(-a_n)$ (ad esempio $a_n = 1$).

2. Sia $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ una serie di potenze. Dimostrare che, se $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ converge ad un R, quest'ultimo è il raggio di convergenza della serie.

   Soluzione. Sia S il limite del rapporto. Per definizione esiste un N tale che, per ogni $n \geq N$,
$$\frac{1}{S-\epsilon}|a_n| < |a_{n+1}| < \frac{1}{S+\epsilon}|a_n|$$
   e quindi
$$\left(\frac{1}{S-\epsilon}\right)^2 |a_n| < \frac{1}{S-\epsilon}|a_{n+1}| < a_{n+2} \Longrightarrow \left(\frac{1}{S-\epsilon}\right)^k |a_n| < |a_{n+k}|$$
   e allo stesso modo per l'altra disuguaglianza. Dunque
$$\left(\frac{1}{S+\epsilon}\right)^k |a_n| < |a_{n+k}| < \left(\frac{1}{S-\epsilon}\right)^k |a_n|$$
   per ogni k, fissato un $n \geq N$. Estraendo la radice k-esima
$$\limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{S+\epsilon}\right)^{k/k} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_n|} < \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_{n+k}|} < \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{S-\epsilon}\right)^{k/k} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_n|}$$
   Essendo n fissato, le radici a primo e terzo membro tendono a 1; essendo il membro centrale l'inverso del raggio di convergenza risulta
$$\frac{1}{S+\epsilon} < \frac{1}{R} < \frac{1}{S-\epsilon}$$

3. Sviluppare in serie di potenze nel punto indicato.

   a) $f(z) := \dfrac{1}{z^2 - 2z + 2}$ in $z = 1$ b) $f(z) := \dfrac{1}{(2i+z)^3}$ in $z = 0$

   Soluzione.

a) $\dfrac{1}{z^2-2z+2} = \dfrac{1}{(z-1)^2+1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n$

b)

$$\frac{1}{(2i+z)^3} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{2i+z} = \frac{1}{4i}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{1+\frac{z}{2i}} = \frac{1}{4i}\frac{d^2}{dz^2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{(2i)^n} =$$

$$\frac{1}{4i}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{d^2}{dz^2}\frac{z^n}{(2i)^n} = \frac{1}{4i}\sum_{n\geq 2}(-1)^n n(n-1)\frac{z^{n-2}}{(2i)^n}$$

4. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i^n)z^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i^n)^n z^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}4^{n^4}z^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2^n}z^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty}n!z^{n!}$

Soluzione.

a) 1

b) $\frac{1}{2}$

c) 0

d) 0 (applicare il criterio del rapporto - esercizio 2)

e) 1 (considerarla come sottoserie di $\sum_{k\geq 0} kz^k$)

5. Siano $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ e $\sum_{n\geq 1} b_n z^n$ due serie di potenze con raggio di convergenza rispettivamente R_1 e R_2. Dimostrare che il raggio di convergenza di $\sum_{n\geq 1} a_n b_n z^n$ è $\geq R_1 R_2$.

Soluzione. Per definizione di raggio di convergenza, basta dimostrare che $\limsup x_n y_n \leq (\limsup x_n)(\limsup y_n)$ per ogni coppia di successioni positive $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Siano $\limsup x_n = X$, $\limsup y_n = Y$: questo significa che $x_n \leq X+\epsilon$ e $y_n \leq Y+\epsilon$ definitivamente, ovvero

$$x_n y_n \leq (X+\epsilon)(Y+\epsilon) = XY + \epsilon(X+Y+\epsilon) =$$

definitivamente. Ma $\epsilon(X+Y+\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$, e quindi, per ogni ϵ', $x_n y_n \leq XY + \epsilon'$ definitivamente, e $\limsup x_n y_n \leq XY$, come richiesto.

6. Sia $H(\Omega)$ l'insieme delle funzioni olomorfe in un aperto $\Omega \neq \varnothing$. Verificare che $H(\Omega)$ è un anello, determinarne gli elementi invertibili e almeno un ideale massimale.

Soluzione. Somme, differenze e prodotti (punto per punto) di funzioni olomorfe sono olomorfe, e quindi $H(\Omega)$ è un anello, con elemento neutro la funzione costantemente 1. Se f è olomorfa, il suo inverso può quindi essere solo $\frac{1}{f}$, e questa è olomorfa se e solo se f non è mai nulla in Ω; $U(H(\Omega))$ è quindi formato dalle funzioni che non si annullano in Ω.

Sia $z \in \Omega$. La funzione $\phi : H(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ che associa a f il valore $f(z)$ è un omomorfismo di anelli suriettivo, e quindi $\ker \phi = M$ è un ideale massimale ($\mathbb{C}$ è un campo). M è, più esplicitamente, l'insieme delle funzioni olomorfe che si annullano in z.

7. Determinare la regione in cui le seguenti funzioni sono olomorfe:

   a) $\exp(z^2)$ b) $\mathrm{Re}(z)$ c) $|z|^2$ d) z^{-1}

   e) $\cos(\mathrm{Re}(z)) + i \sin(\mathrm{Im}(z)^2)$ f) $\ln(|z|) + i \arg(z)$, con $\arg(z) \in [\theta, \theta + 2\pi)$

   Soluzione.

   a) $\mathbb{C}$.
   b) Non è mai olomorfa.
   c) Non è mai olomorfa (o, a seconda delle definizioni, è olomorfa solo in 0).
   d) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
   e) Non è mai olomorfa (la prate immaginaria non è una funzione armonica).
   f) $\mathbb{C} \setminus \{z : \arg(z) = \theta\}$ (è una determinazione del logaritmo, con un "salto" in corrispondenza della semiretta di argomento θ).

8. a) Dimostrare che, se esiste un $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $z^n = 1$, allora z è sul cerchio unitario.
   b) Dimostrare che, se $\lim_{n\to+\infty} z^n = 1$, allora $z = 1$.
   c) Esistono numeri complessi tali che $\lim_{n\to+\infty} z^n = -1$?

   Soluzione.

   a) $|z^n| = |z|^n$, quindi se $z^n = 1$ si ha $|z|^n = 1$, ed essendo $|z|$ reale positivo dev'essere 1, cioè |z| è sul cerchio unitario.
   b) Poiché $r^n \to \infty$ se $r > 1$ e $r^n \to 0$ se $r \in (0, 1)$, si deve avere $|z| = 1$. Poiché $z^n \to 1$, per ogni $\epsilon > 0$ l'argomento principale (compreso tra $-\pi$ e π) di z^n è definitivamente in $(-\epsilon, \epsilon)$; sia N siffatto. Anche z^{N+1} ha argomento in questo intervallo, e quindi z deve avere argomento in $(-2\epsilon, 2\epsilon)$. Avvenendo questo per ogni valore di ϵ, l'unica possibilità è che $z = 1$.
   c) Ragionando analogamente al punto precedente (ma considerando l'argomento principale compreso in $[0, 2\pi)$ e la successione definitivamente in $(\pi-\epsilon, \pi+\epsilon)$) si ottiene come unica possibilità $z = -1$; ma $(-1)^n$ non ha limite, e quindi la proprietà non è mai verificata.

9. Sia $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, tale che non esiste nessun $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $z^n = 1$. Dimostrare che per ogni w di norma unitaria esiste una successione $\{n_k\}$ tale che $z^{n_k} \to w$. Dedurne che l'insieme dei punti limite di $\{\cos(n\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è $[-1, 1]$ per ogni θ che non è un multiplo razionale di π.

   Soluzione. Dimostriamo preliminarmente che esiste una sottosucessione che tende a 1. Sia $A = \{z^n | z \in \mathbb{N}\backslash\{\ 0\}\}$. A è infinito (perché altrimenti esistono $j > k$ tali che $z^j = z^k$ e quindi $z^{j-k} = 1$, contro l'ipotesi che z non sia una radice dell'unità), ed essendo contenuto nel compatto (chiuso e limitato) $S^1 = \{z \in \mathbb{C}||z| = 1\}$ ammette un punto limite w. Sia n_k tale che $z^{n_k} \to w$, e sia $m_k = n_{k+1} - n_k$. Si ha

$$\lim_{k\to+\infty} z^{m_k} = \lim_{k\to+\infty} z^{n_{k+1}-n_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{z^{n_{k+1}}}{z_{n_k}} = \frac{\lim_{k\to+\infty} z^{n_{k+1}}}{\lim_{k\to+\infty} z_{n_k}} = \frac{w}{w} = 1$$

   Sia ora w un qualunque numero complesso di norma unitaria, e sia $\theta \in [0, 2\pi)$ il suo argomento. Non essendo un punto limite di $\{z^n\}$, esiste un ϵ tale che nessun z^n ha argomento in $(\theta - \epsilon, \theta + \epsilon) \subset [0, 2\pi)$; per il punto precedente, tuttavia, esiste un N tale che z^N ha argomento minore di ϵ, e una sua potenza necessariamente ricade in $(\theta - \epsilon, \theta + \epsilon)$, contro l'ipotesi.

   Se θ è l'argomento di z, $\cos(n\theta)$ è la parte reale di z^n; per ogni $x \in [-1, 1]$, la successione n_k tale che $\cos(n_k\theta) \to x$ sarà quella tale che z^{n_k} tende a uno dei due complessi di norma unitaria la cui parte reale è x.