Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

TUTORATO 6
16 NOVEMBRE 2011

1. Sia f una funzione intera tale che $|f(z)| < A|z|^n$ per un $n \in \mathbb{N}$, un $A > 0$ e per $|z|$ sufficientemente grande. Dimostrare che f è un polinomio.

2. Calcolare i seguenti integrali:

   a) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-2}\mathrm{d}z$ c) $\displaystyle \int_{|z|=5} \frac{\sin(3z)}{z+\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}z$ e) $\displaystyle \int_{|z-2|+|z+2|=6} \frac{e^{3z}}{z-\pi i}\mathrm{d}z$

   b) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-2)^3}\mathrm{d}z$ d) $\displaystyle \int_{|z-1|=4} \frac{e^{3z}}{z-\pi i}\mathrm{d}z$ f) $\displaystyle \int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^3}\mathrm{d}z$

   g) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\mathrm{d}z$, dove C è il rettangolo di vertici $\pm 2 \pm i$

3. Dimostrare che, se $t > 0$, allora $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2+1}\mathrm{d}z = \sin t$.

4. Sia f analitica all'interno di una curva chiusa semplice C che contiene il punto a. Dimostrare che $\displaystyle (f(a))^n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(f(z))^n}{z-a}\mathrm{d}z$

5. Verificare che $\displaystyle \oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z = 0$. Si può concludere da questo che $\displaystyle \frac{1}{z^2+1}$ è la derivata di una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$?

6. a) Sia f una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con un numero finito di poli. Dimostrare che f è il quoziente di due funzioni intere. Quale problema sorge nel caso di un numero infinito di poli?

   b) Esibire una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con un numero infinito di poli.

7. Determinare e classificare le singolarità delle seguenti funzioni:

   a) $\displaystyle \frac{1}{(2\sin z - 1)^2}$ c) $\cos(z^2 + z^{-2})$

   b) $\displaystyle \frac{z}{e^{1/z}-1}$ d) $\displaystyle \frac{z}{e^z - 1}$

8. Sia f una funzione intera. Definiamo la *singolarità di f all'infinito* come la singolarità di $g(z) = f(1/z)$ in $z = 0$.

a) Dimostrare che se f ha una singolarità rimovibile all'infinito allora è costante.

b) Verificare che se f è un polinomio di ordine n allora f ha all'infinito un polo di ordine n.

c) Dimostrare che se f ha un polo di ordine n all'infinito allora è un polinomio di ordine n.

9. Espandere in serie di Laurent in un intorno di 0 e descrivere la singolarità della funzione:

a) $\dfrac{1-\cos(z)}{z}$ b) $\dfrac{e^{z^2}}{z^3}$ c) $z^{-1}\cosh(z^{-1})$

10. Trovare le serie di Laurent di:

a) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$ attorno a 0, 1 e 2

b) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)}$ attorno a 0