corso GE1 - a.a. 08/09 - Appello A (4/6/09)

1) Discutere il seguente sistema a coefficienti reali, in cui $a \in \mathbf{R}$ è un parametro:

$$\begin{array}{rrrrl} & aX_2 & +X_3 & +2X_4 = & 2 \\ X_1 & -X_2 & & +X_4 = & 1 \\ X_1 & +X_2 & -X_3 & -X_4 = & -2 \end{array}$$

determinandone le soluzioni reali nei casi in cui è compatibile.

2) Studiare la diagonalizzabilità dell'operatore lineare $F_A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definito dalle matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Nel caso sia diagonalizzabile determinare una matrice $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

3) Sia X uno spazio vettoriale reale, $\dim(X) = 4$, e sia $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una sua base. Siano

$$Y = \langle e_1 - 2e_2, e_1 + e_3, 3e_1 - 4e_2 + e_3 \rangle, \ Z = \langle e_2 - 3e_3, e_1 - 2e_2 + 7e_3 \rangle$$

(i) Si determinino dimensioni e basi di $Y,\ Z,\ Y \cap Z,\ Y + Z$.
(ii) Si spieghi se può esistere un endomorfismo $\varphi : X \to X$ per il quale Y e Z siano autospazi.
(iii) Si studi l'applicazione lineare $f : X \to Y + Z$ tale che

$$f(e_1) = e_1 - 3e_2 + 3e_3,\ f(e_2) = e_1 - 2e_2,\ f(e_3) = e_1 - 2e_2 + 7e_3,\ f(e_4) = 2e_1 - 2e_2 + 8e_3$$

e si determini la matrice $M_{\mathbf{be}}(f)$ dove $\mathbf{b}$ è la base di $Y + Z$ ottenuta nella parte (i) dell'esercizio.

4) Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 3 in cui sia assegnato un riferimento affine.
(i) Determinare i valori del parametro reale h per cui le due rette:

$$r : X + Y - 2Z - 1 = hX - 2Y - 3 = 0, \qquad s : X = 1 + t,\ Y = 1 - 2t,\ Z = 3 + t$$

sono sghembe.
(ii) Per $h = 1$ si determinino equazioni parametriche della retta passante per $P(0, 0, 1)$ e complanare con r ed s.

SOLUZIONI

1) Compatibile per $a \neq -2$. Soluzioni:

$$\left(1 - t - \frac{1}{a+2}, \frac{-1}{a+2}, 1 - 2t + \frac{2a}{a+2}, t\right)$$

2) $P_A(T) = T^4 - 4T^3$, autovalori $\lambda = 0^3, 4$. E' diagonalizzabile.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) (i) $\dim(Y) = \dim(Z) = 2,\ \dim(Y \cap Z) = 1, \dim(Y + Z) = 3$. Basi:

di Y: $\{e_1 - 2e_2, e_1 + e_3\}$, di Z: $\{e_2 - 3e_3, e_1 - 2e_2 + 7e_3\}$,

di $Y \cap Z$: $\{e_1 + e_3 = 2(e_2 - 3e_3) + (e_1 - 2e_2 + 7e_3)\}$

di $Y + Z$: $\{e_1, e_2, e_3\}$

(ii) Non può esistere perché due autospazi o coincidono oppure hanno per intersezione $(\mathbf{0})$, mentre invece $Y \cap Z \neq (\mathbf{0})$ e $Z \neq Y \cap Z \neq Y$.

(iii)

$$M_{\mathbf{be}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

4) (i) $h = -35/2$. (ii) eq. cartesiane: $-3Y+2Z-2 = 5X+Y-3Z+3 = 0$.
eq. parametriche: $X = 7t,\ Y = 10t,\ Z = 1 + 15t$.