Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 10 (14 MAGGIO 2008)
CAMBIAMENTO DI COORDINATE AFFINI, DIAGONALIZZAZIONE

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck *http://www.mat.uniroma3.it*

1. Per determinare se F è diagonalizzabile, rappresentiamola in forma matriciale rispetto alla base canonica e calcoliamone il polinomio caratteristico: (si noti che, scegliendo un'altra base, il polinomio caratteristico sarebbe stato lo stesso; è stata scelta quella canonica per semplificare i conti) $P_F(\lambda) = \det(M_e(F) - \lambda \cdot \mathbb{I}_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$. Ci sono quindi 3 autovalori distinti (0, 1 e 2) e perciò F è diagonalizzabile; per determinare una base di autovettori, cerchiamo i generatori dei rispettivi autospazi, cioè delle soluzioni dei sistemi omogenei $(M_e(F) - \lambda \cdot \mathbb{I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, per $\lambda = 0, 1, 2$. Per $\lambda = 0$ troviamo $\begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$, che ha come soluzioni $\langle(1, 1, -1)\rangle$; allo stesso modo, troviamo i generatori degli autospazi relativi a 1 e 2, che sono rispettivamente $(0, 1, 0)$ e $(1, -1, 1)$. Quindi, una base di autovettori per F è $\{(1, 1, -1), (0, 1, 0), (1, -1, 1)\}$. Per passare dalla base canonica a quella composta da questi autovettori, abbiamo che $M_b(F) = M_{b,e}(\mathbb{I}) \cdot M_e(F) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = (M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot M_e(F) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, che è una matrice diagonale.
   Ragionando come sopra, si trova che $P_G(\lambda) = \det(M_e(G) - \lambda \cdot \mathbb{I}_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 1)$. Abbiamo quindi un unico autovalore reale (3), che ha molteplicità algebrica 1, quindi l'autospazio relativo a questo autovettore avrà dimensione 1; quindi, essendo la somma delle dimensioni degli autospazi strettamente minore dello spazio su cui è definita G, l'applicazione NON è diagonalizzabile.
   $P_H(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$, quindi gli autovalori

di H sono 1,-1 e 3; ho quindi tre autovalori reali distinti, pertanto H è diagonalizzabile; il sottospazio relativo a 1 è generato da $(1,-2,-1)$,quello relativo a -1 è generato da $(1,0,-1)$ e quello relativo a 3 da $(1,-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$. Quindi una base di autovettori per H è $\{(1,-2,-1),(1,0,-1),(1,-\frac{4}{5},\frac{3}{5})\}$.

Infine si ha che $M_b(H) = M_{b,e}(\mathbb{I}) \cdot M_e(H) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -\frac{4}{5} \\ -1 & -1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Per trovare autovalori e autospazi di A, calcoliamo il polinomio caratteristico come nell'esercizio precedente: abbiamo che $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2)$. La matrice ha quindi due autovalori reali distinti e pertanto è diagonalizzabile. Per trovare gli autospazi, cerchiamo le soluzioni dei sistemi lineari $(A - 0 \cdot \mathbb{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $(A - 2 \cdot \mathbb{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; si trova rispettivamente $\langle(1,-1)\rangle$ e $\langle(1,1)\rangle$. Per trovare le matrici M e D conviene considerare l'applicazione lineare F definita dalla matrice A rispetto alla base canonica: A=$M_e(F)$; essendo $b = \{(1,-1),(1,1)\}$ una base di autovettori di A (e quindi di F), avremo che $M_b(F)$ è una matrice diagonale avente i due autovalori di A sulla diagonale principale, ovvero $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, quindi $D = M_b(F)$. Inoltre, per la formula di cambiamento di base, abbiamo che $D = M_b(F) = M_{b,e}(\mathbb{I}) \cdot M_e(F) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = (M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot A \cdot M_{e,b}(\mathbb{I})$, quindi $M = M_{e,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
$P_B(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda + 1$, quindi B ha un unico autovalore reale (2) con molteplicità algebrica 1; quindi la matrice B NON è diagonalizzabile.
$P_C(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$, quindi gli autovalori di C sono -1 e 2; per vedere se C è diagonalizzabile andiamo a studiare le dimensioni dei sottospazi relativi ai due autovalori; il sottospazio relativo a 2 è generato dai vettori $(1,0,1,1),(0,1,2,1)$ mentre il sottospazio relativo a -1 è generato da $(1,0,1,-2),(0,1,-1,1)$, quindi abbiamo che la somma delle molteplicità geometriche è uguale alla dimensione dello spazioe quindi possiamo concludere che la matrice è diagonalizzabile. Quindi una base di autovettori per C è $\{(1,0,1,-2),(0,1,-1,1),(1,0,1,1),(0,1,2,1)\}$. Infine si ha che $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Il polinomio caratteristico di A è $\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - (k^2 + k))$, quindi gli autovalori sono 0, $1 + \sqrt{k^2 + k + 1}$ e $1 - \sqrt{k^2 + k + 1}$. Ovviamente (visto che $k^2 + k + 1$ è un polinomio irriducibile, i.e. non si annulla mai), $1 + \sqrt{k^2 + k + 1}$ e $1 - \sqrt{k^2 + k + 1}$ sono sempre radici distinte così come 0 e $1 + \sqrt{k^2 + k + 1}$ (per la stessa motivazione), resta da controllare per quali valori di k si ha che $1 - \sqrt{k^2 + k + 1} = 0$, ossia quando $k^2 + k = 0$, ma ciò succede solo quando $k = 0, -1$. Quindi per $k \neq 0, -1$ ho tre autovalori reali distinti

e quindi A è diagonalizzabile, mentre se $k = 0$ si ha che $\dim V_0 = 1$, ma come abbiamo visto in precedenza la molteplicità algebrica di 0 è 2 (i.e. A non è diagonalizzabile); infine se $k = -1$ svolgendo i conti si trova lo stesso problema riscontrato nel caso $k = 0$, quindi anche in questo caso la matrice non risulta essere diagonalizzabile.
Il polinomio caratteristico di B si fattorizza in $(\lambda-1)^2(\lambda^2-\lambda-k)$, quindi per $k < -\frac{1}{4}$ abbiamo un solo autovalore reale con molteplicità algebrica 2, quindi B non può essere diagonalizzabile; se $k = \frac{1}{4}$ abbiamo due autovalori $(0, \frac{1}{2})$, ciascuno con molteplicità algebrica 2 ma la molteplicità geometrica di $\frac{1}{2}$ è 1, quindi B non è diagonalizzabile; se $-\frac{1}{4} < k < 0$ ho tre autovalori distinti $1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4k})$ e $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4k})$ che hanno, rispettivamente, molteplicità geometrica(dimensione dell'autospazio associato) 2,1 ed 1 quindi, visto che la somma delle dimensioni degli autospazi è pari alla dimensione dello spazio si ha che la matrice è diagonalizzabile; se $k = 0$ invece si hanno solo due autovalori 0 con molteplicità algebrica e geometrica pari ad 1 ed 1 con molteplicità algebrica 3 e molteplicitá geometrica 2, quindi risulta che B non é diagonalizzabile in questo caso; infine se $k > 0$ abbiamo tre autovalori reali distinti di cui uno di essi (è proprio 1) ha molteplicità geometrica 2 quindi, visto che la somma delle molteplicità geometriche é pari alla dimensione dello spazio si ha che B in questo caso é diagonalizzabile. Ricapitolando B è diagonalizzabile $\Leftrightarrow k \in (-\frac{1}{4}, 0) \cup (0, +\infty)$.
Il polinomio caratteristico di C è $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-k)$, quindi per $k \notin \{1,2,3\}$ la matrice ha quattro autovalori distinti e quindi è diagonalizzabile; se $k = 2$ l'autospazio relativo all'autovalore 2 ha dimensione 2, quindi anche in questo caso C è diagonalizzabile; infine, se $k = 1$ oppure $k = 3$ ognuno dei tre autospazi ha dimensione 1, quindi non è diagonalizzabile. Riassumendo, C è diagonalizzabile $\Leftrightarrow 1 \neq k \neq 3$.

4. Verifichiamo la linearità: siano $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora $F(\alpha \cdot A + \beta \cdot B) = (\alpha \cdot A + \beta \cdot B)^t = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} + \beta \cdot b_{11} & \alpha \cdot a_{21} + \beta \cdot b_{21} \\ \alpha \cdot a_{12} + \beta \cdot b_{12} & \alpha \cdot a_{22} + \beta \cdot b_{22} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \alpha \cdot A^t + \beta \cdot B^t = \alpha \cdot F(A) + \beta \cdot F(B)$. La matrice rispetto alla base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per trovare quella rispetto a b si può applicare la formula di cambiamento di base e si trova $M_b(F) = (M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot M_e(F) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Cerchiamo ora il polinomio caratteristico, usando per semplicità la matrice

rispetto alla base canonica: $P_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$ $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1 = (\lambda-1)^3(\lambda+1)$. Calcoliamo ora gli autospazi relativi a 1 e -1:

V_1 : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{12} = a_{21} \Rightarrow V_1 =$ $\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$

V_{-1} : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{12} = -a_{21} \\ a_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 =$ $\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$.

Avendo trovato una base di autovettori $\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \}$, possiamo dire che l'operatore F è diagonalizzabile.

(Si noti che autovalori, autospazi e diagonalizzabilità potevano essere discussi senza fare calcoli con il seguente ragionamento teorico: ogni matrice simmetrica è per definizione tale che $F(A) = {}^tA = A$ e ogni matrice simmetrica è tale che $F(A) = {}^tA = -A$, quindi le prime sono autovettori con autovalore 1 e le seconde autovettori con autovalore -1, e poiché lo spazio delle matrici quadrate è somma diretta di questi due autospazi, questi erano tutti e soli gli autovalori e autospazi e l'operatore di trasposizione è perciò diagonalizzabile).

5. Per dimostrare la prima parte è sufficiente notare che A e ${}^tA$ hanno lo stesso polinomio caratteristico: se $P_A(\lambda) = P_{{}^tA}(\lambda)$, i due polinomi avranno le stesse radici, che sono proprio gli autovalori di A e ${}^tA$ rispettivamente. L'uguaglianza dei due polinomi caratteristici discende della linearità dell'operazione di trasposizione, che si verifica immediatamente (tra l'altro è già stata vista nell'esercizio precedente) e dall'invarianza per trasposizioni del determinante: $\det({}^tA - \lambda \cdot \mathbb{I}_n) = \det({}^tA - \lambda \cdot {}^t\mathbb{I}_n) = \det{}^t(A - \lambda \cdot \mathbb{I}_n) = \det(A - \lambda \cdot \mathbb{I}_n)$. Tuttavia, non è detto che gli autovettori di ${}^tA$ siano gli stessi di A: ad esempio, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha come autovalori 0 e 1, l'autospazio relativo a 0 è $\langle(1,-1)\rangle$ e quello relativo a 1 è $\langle(1,0)\rangle$; ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ invece ha come autospazio relativo a 0 $\langle(0,1)\rangle$ e come autospazio relativo a 1 $\langle(1,1)\rangle$.

6. Se A è una matrice diagonalizzabile, allora esiste una matrice invertibile M tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M = D$, con D matrice diagonale. Allora $M^{-1} \cdot A^2 \cdot M = M^{-1} \cdot A \cdot M \cdot M^{-1} \cdot A \cdot M = D^2$, che è una matrice diagonale perché prodotto di due matrici diagonali, quindi anche A^2 è simile ad una matrice diagonale, cioè è diagonalizzabile. Il viceversa, tut-

tavia, non è vero: consideriamo ad esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, che è ovviamente diagonalizzabile (essendo diagonale), ma A non è diagonalizzabile: infatti $P_A(\lambda) = \lambda^2$ e l'autospazio relativo all'autovalore 0 ha dimensione 1, perché corrisponde proprio alle soluzioni del sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e la matrice A ha rango 1