Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

Tutorato numero 10 (14 Maggio 2009)
Cambiamento di coordinate affini, diagonalizzazione

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck *http://www.mat.uniroma3.it/*

1. Per ognuno dei seguenti operatori lineari $F, G, H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, verificare se sono diagonalizzabili; in tal caso, trovare una base $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ di autovettori, scrivere la formula di passaggio da $M_e(F)$ a $M_b(F)$ (rispettivamente, da $M_e(G)$ a $M_b(G)$ e da $M_e(H)$ a $M_b(H)$), dove $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica, e verificare che quest'ultima matrice è diagonale:
$F(x, y, z) = (x + z, -x + y, x + z)$
$G(x, y, z) = (x + 2z, 2x + y, x + y + z)$
$H(x, y, z) = (x - y + 2z, -x + y - z, 2x + y + z)$

2. Trovare gli autovalori di ognuna delle seguenti matrici reali e i rispettivi autospazi; stabilire se sono diagonalizzabili e in tal caso trovare una matrice diagonale a cui sono simili e una matrice M tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M$ (rispettivamente, $M^{-1} \cdot B \cdot M$, $M^{-1} \cdot C \cdot M$) sia diagonale:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Determinare i valori del parametro reale k per cui le seguenti matrici reali sono diagonalizzabili:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

4. Sia $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ così definita: $F(A) = {}^tA$. Verificare che è un'applicazione lineare e scriverne la matrice associata rispetto alla base $e = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ e rispetto alla base $b = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$. Trovare autovalori, relativi autospazi e dire infine se è diagonalizzabile.

5. Sia $A \in M_n(K)$. Dimostrare che gli autovalori di ${}^tA$ sono gli stessi di A. Anche gli autovettori sono gli stessi?

6. Sia A una matrice quadrata diagonalizzabile. Dimostrare che A^2 è diagonalizzabile. È vera anche l'implicazione inversa?