Università degli Studi Roma Tre – Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 – Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

TUTORATO NUMERO 4 (18 MARZO 2009)

RANGO, DIMENSIONE, BASI, FORMULA DI GRASSMAN

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili ai seguenti indirizzi:
http://www.lifedreamers.it/liuck/
http://www.mat.uniroma3.it/

1. Dire se i seguenti insiemi di vettori sono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$:
   - *(a) n = 2;* { (2,3), (3,1) }
   - *(b) n = 2;* { (-5,15), (-1,3) }
   - *(c) n = 3;* { (1,2,0), (2,-3,1), (0,7,-1) }
   - *(d) n = 3;* { (1,1,2), (1,0,1), (0,2,1) }

2. Trovare le dimensioni di U, W, $U+W$, $U \cap W$ e una base per ognuno di essi:
   - *(a)* $U = <(1,0,1), (0,2,3), (1,2,1)>$ $\quad W = <(0,1,2), (2,1,1), (0,1,1)>$
   - *(b)* $U = <(0,1,1), (1,2,0), (1,5,3)>$ $\quad W = <(1,0,3), (1,0,-2), (2,0,1)>$
   - *(c)* $U = <(0,1,1,0), (1,0,2,1), (1,0,1,1)>$ $\quad W = <(1,1,1,1), (2,1,1,0), (0,1,1,2)>$
   - *(d)* $U = <(2,1,1,1), (1,1,2,3), (3,2,0,1)>$ $\quad W = <(2,0,3,0), (1,0,0,3), (3,1,2,0)>$

3. Determinare una base dei seguenti sottospazi e completarla ad una base di $\mathbb{R}^n$:
   - *(a) n = 3;* < (3,2,1), (2,0,1), (4,8,0) >
   - *(b) n = 3;* < (3,3,9), (1,0,1), (0,1,2) >
   - *(c) n = 4;* < (0,1,1,1), (1,2,3,0), (2,6,8,4), (2,5,7,2) >
   - (d) *n = 4;* < (1,0,1,2), (3,0,1,2), (2,0,0,1), (2,0,2,3) >

4. Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   $AB \quad BC \quad CD \quad DA$

5. Mostrare che una matrice $M \in M_{n,m}(K)$ ha rango $r \le 1 \Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix}$ tali che $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix} = M$.