Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
GE3 - Topologia
Esercitazione 1
Martedì 3 Marzo 2009
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. Sia X un insieme non vuoto e di cardinalità finita. Dimostrare che ogni distanza su X è topologicamente equivalente alla distanza discreta.

   È sufficiente dimostrare che, data una qualunque distanza d su X, per ogni $x \in X$, $\{x\}$ è aperto nella topologia indotta da d.

   Sia $x \in X$. Sia $r := \min_{\{y \in X, y \neq x\}}\{d(x,y)\}$. Dato che X è un insieme finito, tale minimo esiste. Dato che d è una distanza, $r > 0$.

   Si consideri allora il disco (secondo la distanza d) di centro x e raggio $r/2$, $D_{r/2}(x)$. Per definizione di r e dato che $r/2 < r$ si ha $D_{r/2}(x) = \{x\}$ e quindi $\{x\}$ è aperto.

2. Nello spazio topologico $(\mathbb{R}, i_s)$ si considerino le seguenti successioni:

   (a) $\{a_n\}$, con $a_n := a \ \forall n \in \mathbb{N}$ (con $a \in \mathbb{R}$, fissato);
   (b) $\{b_n\}$, con $b_n := -n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
   (c) $\{c_n\}$, con $c_n := n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

   Determinarne i limiti.

   Nota: se $x \in \mathbb{R}$ si indica con $[x]$ la parte intera inferiore di x, ovvero il più grande intero minore o uguale a x; esempi: $[3] = 3, [2.6] = 2, [-1.4] = -2$.

   (a) Sia $r \geq a$. Ogni intorno di r, per definizione, contiene un aperto che contiene r. Dato che $r \geq a$ allora, per come è definita la topologia i_s, tale aperto contiene a. Allora per definizione di limite $r = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Se invece $r < a$ allora $(-\infty, a)$ è un intorno di r che però non contiene a: quindi se $r < a$, r non è limite della successione $\{a_n\}$.
   (b) $\{b_n\}$ converge ad ogni numero reale. Infatti, sia $r \in \mathbb{R}$; ogni intorno N di r contiene r e tutti i reali minori di r, quindi se $n \geq -[r]$ allora $b_n \in N$, da cui $r = \lim_{n\to+\infty} b_n$.
   (c) $\{c_n\}$ non converge a nessun numero. Infatti, sia $r \in \mathbb{R}$ e consideriamo $N = (-\infty, r+1)$, intorno di r. Se $n \geq [r] + 2$ allora $c_n \notin N$, quindi r non può essere limite per $\{c_n\}$.

3. (E. Sernesi - Geometria 2 - esercizio 2 pagina 32)

   Dimostrare che dati comunque due sottoinsiemi A e B di uno spazio topologico X si ha

   (a) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
   (b) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$;
   (c) $\mathrm{Int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$;

(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(e) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Trovare esempi in cui le inclusioni precedenti sono strette.

(a) Sia, per assurdo, $x \in \mathrm{Fr}(A \cup B)$, ma $x \notin \mathrm{Fr}(A)$, $x \notin \mathrm{Fr}(B)$. Siccome $x \notin \mathrm{Fr}(A)$ allora $x \in \mathrm{Int}(A)$ oppure $x \in \mathrm{Est}(A)$. Siccome $\mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(A \cup B)$ (cfr. (c)) allora $x \notin \mathrm{Int}(A)$ (altrimenti $x \in \mathrm{Int}(A \cup B) \Rightarrow x \notin \mathrm{Fr}(A \cup B)$). Perciò $x \in \mathrm{Est}(A)$. Analogamente $x \in \mathrm{Est}(B)$.

Per definizione di punto esterno, esistono due intorni di x, $N_1, N_2 \in \mathcal{N}(x)$, tali che $N_1 \subseteq X \setminus A$ e $N_2 \subseteq X \setminus B$. Ma allora $N_1 \cap N_2 \subseteq (X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B)$, che implica che $x \in \mathrm{Est}(A \cup B)$; assurdo.

Esempio con inclusione stretta: in $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea si prendano $A := (0, 1]$ e $B := [1, 2)$. Allora $\mathrm{Fr}(A) = \{0, 1\}$, $\mathrm{Fr}(B) = \{1, 2\}$, ma $\mathrm{Fr}(A \cup B) = \{0, 2\} \subsetneq \{0, 1, 2\} = \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.

(b) Sia $x \in \mathrm{Int}(A \cap B)$. Allora $\exists N \in \mathcal{N}(x)$ tale che $N \subseteq A \cap B$. Perciò $N \subseteq A, N \subseteq B$, che implica $x \in \mathrm{Int}(A), x \in \mathrm{Int}(B) \Rightarrow x \in \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.

Viceversa: sia $x \in \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$. Allora $\exists N_1, N_2 \in \mathcal{N}(x)$ tali che $N_1 \subseteq A$, $N_2 \subseteq B$. Quindi $N_1 \cap N_2 \subseteq A \cap B \Rightarrow x \in \mathrm{Int}(A \cap B)$.

(c) Sia $x \in \mathrm{Int}(A)$. Allora $\exists N \in \mathcal{N}(x)$ tale che $N \subseteq A$. Ma quindi $N \subseteq A \cup B \Rightarrow x \in \mathrm{Int}(A \cup B)$. Perciò $\mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(A \cup B)$. Analogamente $\mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A \cup B)$, quindi $\mathrm{Int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$.

Esempio con inclusione stretta: in $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea si prendano $A := \mathbb{Q}$ e $B := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Allora $\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Int}(B) = \emptyset$, ma $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(d) $\overline{A \cup B} = X \setminus \mathrm{Est}(A \cup B) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus (A \cup B)) = X \setminus \mathrm{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) =$ (per (b)) $X \setminus (\mathrm{Int}(X \setminus A) \cap \mathrm{Int}(X \setminus B)) = X \setminus (\mathrm{Int}(X \setminus A)) \cup X \setminus (\mathrm{Int}(X \setminus B)) = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(e) $\overline{A \cap B} = X \setminus \mathrm{Est}(A \cap B) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus (A \cap B)) = X \setminus \mathrm{Int}((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) \subseteq$ (per (c)) $X \setminus (\mathrm{Int}(X \setminus A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus B)) = X \setminus (\mathrm{Int}(X \setminus A)) \cap X \setminus (\mathrm{Int}(X \setminus B)) = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Esempio con inclusione stretta: in $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea si prendano $A := \mathbb{Q}$ e $B := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Allora $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \overline{A \cap B} = \emptyset$, mentre $\overline{A} = \overline{B} = \mathbb{R} \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$.