Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
GE3 - Topologia
Esercitazione 2
Martedì 17 Marzo 2009
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. (E. Sernesi - Geometria 2 - esercizio 4 pagina 59)
   Sia $S := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1, x_2 < 1\}$. Trovare un sottospazio X di $\mathbb{R}^2$ contenente S nel quale S sia, rispetto alla topologia relativa di X,

   (a) aperto e chiuso
   oppure
   (b) chiuso ma non aperto
   oppure
   (c) aperto ma non chiuso

   Soluzione:

   (a) Dato che X è sia aperto che chiuso nella topologia relativa di X, basta prendere $X = S$.
   (b) Sia $S' := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$ e $X := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x_1, x_2 < 1\}$. Dato che S' è un chiuso rispetto alla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$, allora $S = X \cap S'$ è un chiuso rispetto alla topologia relativa di X. Inoltre S non è aperto nella topologia relativa: infatti, se per assurdo esistesse un aperto A di $\mathbb{R}^2$ tale che $S = X \cap A$ allora, dato che $(-1, -1) \in S$, $(-1, -1) \in A$, quindi esisterebbe $r > 0$ tale che $D_r((-1, -1))$ sia tutto contenuto in A; eventualmente considerando un r più piccolo possiamo anche supporre che $D_r((-1, -1))$ sia contenuto in X; ma allora $X \cap D_r((-1, -1)) = D_r((-1, -1)) \not\subseteq S$ (ad esempio $(-1 - \frac{r}{2}, -1) \in D_r((-1, -1))$ ma $(-1 - \frac{r}{2}, -1) \notin S$); assurdo.
   (c) $S' := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x_1, x_2 < 1\}$ e $X := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$. Allora $S = X \cap S'$ è aperto nella topologia relativa di X. Inoltre S non è chiuso, altrimenti il complementare di S in X dovrebbe essere aperto nella topologia relativa, ma ciò non è possibile, come si può dimostrare con un ragionamento analogo a quello del punto precedente, considerando questa volta il punto $(1, 1)$.

2. Siano X, Y due insiemi non vuoti dotati della topologia cofinita. Dimostrare che X e Y sono omeomorfi se, e solo se, X e Y hanno la stessa cardinalità.

   Soluzione:

   X e Y hanno la stessa cardinalità se, e solo se, esiste una biiezione $f : X \to Y$. Dato che un omeomorfismo è una biiezione, è chiaro che se X e Y sono omeomorfi allora X e Y hanno la stessa cardinalità.

Viceversa: supponiamo esista $f : X \to Y$ biiettiva. f è continua: infatti ogni aperto A di Y è del tipo $Y \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}$, da cui $f^{-1}(A) = X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ con $\{x_i\} = f^{-1}(y_i)$, che è aperto per definizione di topologia cofinita. Inoltre f è aperta: $f(X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}) = Y \setminus \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$. Quindi f è un omeomorfismo.

3. (E. Sernesi - Geometria 2 - esercizio 7 pagina 87)

   Sia $p : X \to Y$ un'identificazione. Dimostrare che se D è un sottoinsieme denso di X, $p(D)$ è denso in Y

   Soluzione:

   Per definizione di denso dobbiamo dimostrare che per ogni aperto $B \subseteq Y, B \neq \emptyset$, si ha $B \cap p(D) \neq \emptyset$. Dato che p è un'identificazione, tutti e soli gli aperti di Y sono le immagini tramite p di aperti saturi di X. Perciò esiste $A \subseteq X$ aperto saturo tale che $B = p(A)$. Dato che D è denso in X e A è non vuoto, $A \cap D \neq \emptyset$ quindi $p(A) \cap p(D) \supseteq p(A \cap D) \neq 0$ e l'asserto è dimostrato.

4. (E. Sernesi - Geometria 2 - esercizio 9 pagina 87)

   Dimostrare che uno spazio quoziente di uno spazio separabile è separabile

   Soluzione:

   Sia X spazio separabile, Y un suo quoziente e $p : X \to Y$ la proiezione canonica. Per definizione di spazio quoziente, p è un'identificazione. Per definizione di spazio separabile, esiste un insieme D numerabile e denso in X. Per l'esercizio precedente $p(D)$ è denso in Y. Chiaramente $p(D)$ è anche numberabile, quindi Y è separabile.

5. Dimostrare che lo spazio ottenuto da $\mathbb{R}$ (con la topologia euclidea) identificando $\mathbb{Q}$ a un punto, non ha una base locale numerabile.

   Soluzione:

   Sia $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\rho_{\mathbb{Q}}$ la proiezione canonica.

   Supponiamo per assurdo che esista $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base locale numerabile del punto $[1]_\rho \in \mathbb{R}/\rho_{\mathbb{Q}}$.

   Sia $V_n := p^{-1}(U_n)$. Gli aperti saturi rispetto a p sono tutti e soli gli aperti di $\mathbb{R}$ che contengono $\mathbb{Q}$, quindi, data la corrispondenza biunivoca tra aperti saturi di $\mathbb{R}$ e aperti di $\mathbb{R}/\rho_{\mathbb{Q}}$, necessariamente per ogni aperto saturo A di $\mathbb{R}$ che contiene $\mathbb{Q}$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $V_n \subseteq A$.

   Sia $r_0 \in V_0 \setminus \mathbb{Q}$. Scegliamo induttivamente $r_n \in V_n \setminus \mathbb{Q}$ tale che $r_n > r_{n-1}$: ciò è sempre possibile dato che esiste sempre un razionale $q > r_{n-1}$ e V_n contiene q ed è aperto.

   L'insieme $B := (-\infty, r_0) \cup \bigcup_{n\geq 1}(r_n, r_{n+1})$ è aperto e contiene $\mathbb{Q}$, ma non esiste alcun V_n contenuto in esso, dato che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \in V_n$ ma $r_n \notin B$. Assurdo.