Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
GE3 - Topologia
Esercitazione 4
Martedì 28 Aprile 2009
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. (E. Sernesi - Geometria 2 - esercizio 15 pagina 134)

   Dimostrare che $GL_n(\mathbb{R})$ e $O(n)$ sono sconnessi.

   Soluzione:

   Consideriamo la funzione determinante, det. det è una funzione continua da $M_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$. Quindi se $GL_n(\mathbb{R})$ (risp. $O(n)$) fosse conneso allora $\det(GL_n(\mathbb{R}))$ (risp. $\det(O(n))$) sarebbe connesso in $\mathbb{R}$. Ma $\det(GL_n(\mathbb{R}))$ è uguale a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (risp. $\{-1, 1\}$) che non è un connesso di $\mathbb{R}$.

2. (E. Sernesi - Geometria 2 - esercizio 1 pagina 144)

   Siano x, y punti di uno spazio topologico X. Dimostrare che le applicazioni costanti $c_x, c_y : I \to X$ sono omotope se, e solo se, x e y appartengono alla stessa componente connessa per archi.

   Soluzione:

   Supponiamo che c_x e c_y siano omotope. Allora per definizione esiste una funzione continua $F : I \times I \to X$ tale che $\forall s \in I$ $F(s, 0) = c_x(s) = x$ e $F(s, 1) = c_y(s) = y$. In particolare $F(0, 0) = x$ e $F(0, 1) = y$. Sia $i : I \hookrightarrow I \times I$ la funzione inclusione $i(t) := (0, t)$. Allora $\gamma := F \circ i$, essendo composizione di funzioni continue, è un arco. Inotre $\gamma(0) = F(0, 0) = x$ e $\gamma(1) = F(0, 1) = y$, quindi x e y appartengono alla stessa componente connessa per archi.

   Viceversa supponiamo che x e y appartengano alla stessa componente connessa per archi. Allora, per definizione, esiste un arco $\gamma : I \to X$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Si consideri $p_2 : I \times I \to I$ la proiezione sul secondo fattore e si definisca $F := \gamma \circ p_2$. F è una funzione continua da $I \times I$ in X e, per ogni $s \in I$, $F(s, 0) = \gamma(0) = x$, $F(s, 1) = \gamma(1) = y$, quindi F è un'omotopia tra c_x e c_y.

3. (E. Sernesi - Geometria 2 - esercizio 2 pagina 145)

   Dimostrare che uno spazio X è contraibile se e solo se l'applicazione identità su X, id_X, è omotopa a un'applicazione costante di X in se stesso.

   Soluzione:

   Se X è contraibile allora, per definizione, esistono due funzioni $f : X \to \{p\}$ e $g : \{p\} \to X$ tali che $g \circ f \simeq id_X$. $g \circ f$ è un'applicazione di X in se stesso; inoltre $(g \circ f)(x) = g(p)$ per ogni $x \in X$, quindi $g \circ f$ è costante.

   Viceversa: sia $h : X \to X$ un'applicazione costante tale che $h \simeq id_X$. Sia $p := h(x)$. Sia $f : X \to \{p\}$ l'applicazione costante e $g : \{p\} \to X$ l'inclusione di p in X. Allora $g \circ f = h \simeq id_X$. Inoltre $f \circ g = id_{\{p\}}$. Perciò, essendo f e g equivalenze omotopiche inverse l'una dell'altra, X è omotopicamente equivalente a $\{p\}$, cioè X è contraibile.

4. (E. Sernesi - Geometria 2 - esercizio 3 pagina 145)

   Dimostrare che un sottospazio convesso X di $\mathbb{R}^n$ è contraibile.

   Soluzione:

   In virtù dell'esercizio precedente ci basterà dimostrare che id_X è omotopa a un'applicazione costante di X in se stesso.

   Senza perdita di generalità possiamo supporre $\underline{0} \in X$. Sia $f : X \to X$ l'applicazione costantemente nulla, i.e. tale che $\forall x \in X$, $f(\underline{x}) = \underline{0}$. L'applicazione $F : X \times I \to \mathbb{R}^n$ tale che $F(\underline{x}, t) := t\underline{x}$ è un'applicazione continua. Inoltre, per la convessità di X, $F(X \times I) \subseteq X$, quindi F può essere rivista come applicazione da $X \times I$ in X. In aggiunta $F(\underline{x}, 0) = \underline{0}$ e $F(\underline{x}, 1) = \underline{x}$, quindi F è un'omotopia tra la funzione costantemente $\underline{0}$ e la funzione identità.

5. (E. Sernesi - Geometria 2 - esercizio 4 pagina 145)

   Dimostrare che uno spazio contraibile X è connesso per archi.

   Soluzione:

   Essendo X contraibile esiste una funzione $f : X \to X$ costante tale che $f \simeq id_X$. Sia $p := f(x)$. Per definizione di omotopia esiste $F : X \times I \to X$ tale che per ogni $x \in X$, $F(x, 0) = p$ e $F(x, 1) = x$. Perciò, fissato $x \in X$ e al variare di $t \in I$, $F(x, t)$ è un arco con punto iniziale p e punto finale x. Quindi $C_a(p) = X$, ovvero X è connesso per archi.