Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
GE3 - Topologia
Prima prova di valutazione in itinere
Lunedì 6 Aprile 2009

1. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Sia $\mathcal{T}$ la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definita come $\mathcal{T} := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-a,a) | a \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
   (a) Si dimostri che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$.
   (b) Dopo aver definito la nozione di base per una topologia, esibire una base numerabile per $\mathcal{T}$.
   (c) Determinare, in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, gli eventuali limiti della successione $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$. $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è metrizzabile?
   (d) Determinare interno, esterno, frontiera e chiusura, in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, dell'intervallo $[-2, 1)$.
   (e) Dire se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è uno spazio T1 e/o di Hausdorff.
   (f) Dopo aver definito la nozione di omeomorfismo tra spazi topologici, si dimostri che $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ non è omeomorfo a $(\mathbb{R}, i_s)$, dove $i_s := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\}$ è la topologia degli aperti illimitati a sinistra.

Soluzione:

(a) i. $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$
   ii. Sia I un insieme di indici e $a_i \in \mathbb{R}^+$ $\forall i \in I$. Sia $s := \sup_{i\in I}\{a_i\}$ (eventualmente $s = +\infty$). Allora $\cup_{i\in I}(-a_i, a_i) = (-s, s)$, infatti: se $x \in \cup_{i\in I}(-a_i, a_i)$ allora esiste $i \in I$ tale che $x \in (-a_i, a_i)$; dato che $s \geq a_i$ allora $x \in (-s, s)$; viceversa se $x \in (-s, s)$ allora $|x| < s$ e quindi, per definizione di sup, esiste $i \in I$ tale che $a_i > |x|$, perciò $x \in (-a_i, a_i)$ da cui $x \in \cup_{i\in I}(-a_i, a_i)$.
   iii. $(-a, a) \cap (-b, b) = (-\min\{a, b\}, \min\{a, b\})$.

(b) Per la nozione di base si consulti il libro di testo. Come esempio di base numerabile si prenda $\mathcal{B} := \{(-q, q) | q \in \mathbb{Q}^+\}$. Ogni elemento di $\mathcal{B}$ è chiaramente aperto. Inoltre, essendo $\mathbb{Q}$ numerabile, $\mathcal{B}$ è numerabile. Per concludere $\mathcal{B}$ è una base perché dato $(-a, a) \in \mathcal{T}$ (eventualmente $a = +\infty$) e preso $x \in (-a, a)$ allora, visto che $|x| < a$, esiste $q \in \mathbb{Q}^+$ tale che $|x| < q \leq a$ e dunque $x \in (-q, q) \subseteq (-a, a)$.

(c) La successione $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ converge ad ogni $r \in \mathbb{R}$. Infatti sia $r \in \mathbb{R}$. Ogni intorno di r contiene, per definizione, un aperto che contiene r, ovvero un insieme del tipo $(-a, a)$ con $a > |r|$. Ma allora $\forall n > 1/a$ $1/n \in (-a, a)$ e quindi $r = \lim_{n\to+\infty} 1/n$.
   Dato che $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette più limiti, allora $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ non è metrizzabile.

(d) $\mathrm{Int}([-2, 1)) = (-1, 1)$, infatti: $(-1, 1)$ è aperto e $(-1, 1) \subset [-2, 1)$; inoltre se $x \in \mathrm{Int}([-2, 1))$ allora esiste un aperto $(-a, a)$ che contiene x e tale che $(-a, a) \subset [-2, 1)$, da cui $a < 1$ che implica $|x| < 1$.

Est$([-2,1)) = \emptyset$, infatti: Est$([-2,1)) = $ Int$((-\infty,-2)\cup[1,+\infty))$, ma ogni aperto di $\mathcal{T}$ contiene 0, quindi Int$((-\infty,-2)\cup[1,+\infty)) = \emptyset$.

Dato che $\mathbb{R} = $ Int$([-2,1)) \cup $ Est$([-2,1)) \cup $ Fr$([-2,1))$ e le unioni sono disgiunte, allora Fr$([-2,1)) = \mathbb{R} \setminus $ Int$([-2,1)) = (-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

$\overline{[-2,1)} = \mathbb{R} \setminus $ Est$([-2,1)) = \mathbb{R}$.

(e) $\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ che non è un aperto, dato che ogni aperto di $\mathcal{T}$, tranne l'insieme vuoto, contiene 0. Perciò $\{0\}$ non è un chiuso e quindi $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ non è uno spazio T1. A maggior ragione, dunque, $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ non è neanche uno spazio di Hausdorff.

(f) Per la nozione di omeomorfismo tra spazi topologici si consulti il libro di testo.

Supponiamo per assurdo che esista un omeomorfismo $f:(\mathbb{R},\mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, i_s)$. Allora $(-\infty, f(0)) \in i_s \Rightarrow f^{-1}((-\infty,f(0)) \in \mathcal{T}$. Ma $f(0) \notin (-\infty, f(0))$, quindi $0 \notin f^{-1}((-\infty,f(0))$ da cui $f^{-1}((-\infty,f(0)) = \emptyset$, visto che ogni aperto non vuoto di $\mathcal{T}$ contiene lo 0. Assurdo.

2. Si consideri $X := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+2y^2+x^2y^4 = 3\} \subset \mathbb{R}^2$ con la topologia indotta da $\mathbb{R}^2$. Sia $f : X \to X$ un'applicazione continua e biiettiva.

(a) Dimostrare che X è uno spazio compatto.

(b) Dimostrare che X è uno spazio di Hausdorff.

(c) Dimostrare che f è un omeomorfismo.

(d) Dare un esempio di applicazione continua e biiettiva tra due spazi topologici Y e Z che però non è un omeomorfismo.

Soluzione:

(a) Essendo le due proiezioni x, y da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ funzioni continue allora la funzione $g(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2+2y^2+x^2y^4$ è continua perché prodotto e somma di funzioni continue. Perciò $X = f^{-1}(3)$ è un chiuso, dato che $\{3\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$. Inoltre per ogni $(x,y)\in X$ si ha $x^2+y^2 \le x^2+2y^2+x^2y^4 = 3$, quindi $X \subseteq \overline{D_{\sqrt{3}}(0)}$. Dato che X è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$ allora X è compatto.

(b) $\mathbb{R}^2$ è uno spazio di Hausdorff, quindi ogni suo sottospazio, tra cui X, è di Hausdorff.

(c) Siccome X è uno spazio di Hausdorff ed è compatto, allora f è un'applicazione chiusa. Perciò f, essendo continua, biiettiva e chiusa, è un omeomorfismo.

Come esempio si considerino $Y := (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$, $Z := (\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\})$ e $h = id_{\mathbb{R}}$. Allora h è continua, biiettiva ma h^{-1} non è continua: ad esempio $h(0)$ non è aperto in Z.