GE4 - a.a. 2002/03

Prima prova di esonero - 5/11/2002

Non è consentito consultare libri né appunti. Durante la prova non si può uscire.

1. (7 punti) Si consideri l'applicazione $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ così definita:

$$F(u, v) = (u^2 + v^2, 2uv).$$

(i) Determinare il più grande aperto V in cui F è differenziabile, e l'aperto $W \subseteq V$ in cui F ha matrice jacobiana invertibile.

(ii) Verificare se F è iniettiva oppure no motivando la risposta.

(iii) Determinare un intorno aperto U del punto $(1, 0)$ tale che la restrizione $F_{|U}$ sia un diffeomorfismo di U su $F(U)$, e se ne calcoli l'inverso $G : F(U) \to U$.

2. (7 punti) Si consideri la curva piana $\alpha : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}^2$ definita come

$$\alpha(t) = (cos^2(t), sin(t))$$

(i) Verificare che α è regolare e che definisce un diffeomorfismo di $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sulla sua immagine.

(ii) Nel punto $\alpha(\pi/4)$ calcolare base di Frenet, velocità e curvatura.

3. (10 punti) Si consideri la curva $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\alpha(t) = (t, te^t, t^2e^t)$.

(i) Verificare che α è regolare e che definisce un diffeomorfismo di $\mathbf{R}$ sulla sua immagine.

(ii) Nel punto $\alpha(0)$ calcolare base di Frenet, velocità, curvatura, torsione, equazioni cartesiane dei piani affini osculatore, normale e rettificante.

4. Svolgere al più uno dei seguenti esercizi:

A) (6 punti) Verificare che l'applicazione $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$F(u, v) = (1 + 2u - 2v, 1 - 2u + v)$$

è un diffeomorfismo e calcolarne l'inverso.

B) (8 punti) Verificare che l'applicazione $F : \mathbf{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbf{R}^2 \backslash \{0\}$ definita da

$$F(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2}\right)$$

è un diffeomorfismo e calcolarne l'inverso.

GE4 - a.a. 2002/03

Prima prova di esonero - - 5/11/2002

Non è consentito consultare libri né appunti. Durante la prova non si può uscire.

1. (7 punti) Si consideri l'applicazione $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ così definita:

$$F(u,v) = (-2uv, u^2 + v^2).$$

(i) Determinare il più grande aperto V in cui F è differenziabile, e l'aperto $W \subseteq V$ in cui F ha matrice jacobiana invertibile.
(ii) Verificare se F è iniettiva oppure no motivando la risposta.
(iii) Determinare un intorno aperto U del punto $(1,0)$ tale che la restrizione $F_{|U}$ sia un diffeomorfismo di U su $F(U)$, e se ne calcoli l'inverso $G : F(U) \to U$.

2. (7 punti) Si consideri la curva piana $\alpha : (0,\pi) \to \mathbf{R}^2$ definita come

$$\alpha(t) = (cos(t), sin^2(t))$$

(i) Verificare che α è regolare e che definisce un diffeomorfismo di $(0,\pi)$ sulla sua immagine.
(ii) Nel punto $\alpha(\pi/4)$ calcolare base di Frenet, velocità e curvatura.

3. (10 punti) Si consideri la curva $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\alpha(t) = (t^2e^t, te^t, 2t)$.
(i) Verificare che α è regolare e che definisce un diffeomorfismo di $\mathbf{R}$ sulla sua immagine.
(ii) Nel punto $\alpha(0)$ calcolare base di Frenet, velocità, curvatura, torsione, equazioni cartesiane dei piani affini osculatore, normale e rettificante.

4. Svolgere al più uno dei seguenti esercizi:

A) (6 punti) Verificare che l'applicazione $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$F(u,v) = (1 + u - 2v, 1 - u + v)$$

è un diffeomorfismo e calcolarne l'inverso.

B) (8 punti) Verificare che l'applicazione $F : \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ definita da

$$F(u,v) = \Big(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{-v}{u^2+v^2}\Big)$$

è un diffeomorfismo e calcolarne l'inverso.