Compito n. 1 - Soluzione

1)(i) $V = \mathbf{R}^2$ perché entrambe le componenti di F sono polinomi.

$$JF = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}$$

e quindi $det(JF) = 4(u^2 - v^2)$. Pertanto W è il complementare dell'unione delle rette $u - v = 0$ e $u + v = 0$.
(ii) F non è iniettiva perché $F(u, v) = F(-u, -v)$ per ogni $(u, v) \in \mathbf{R}^2$.
(iii) Posto $(x, y) = F(u, v)$, si ha $x + y = (u + v)^2$, $x - y = (u - v)^2$. Prendendo $U = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : u > |v|\}$ si ha $u + v > 0$ e $u - v > 0$ per ogni $(u, v) \in U$ e quindi $F(u, v) \in U$ per ogni $(u, v) \in U$. D'altra parte ponendo

$$G(x, y) = (\frac{1}{2}(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}), \frac{1}{2}(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}))$$

si ha $G(F(u, v)) = (u, v)$ per ogni $(u, v) \in U$ e $F(G(x, y)) = (x, y)$ per ogni $(x, y) \in U$. Segue che $F(U) = U$ e F e G sono inverse una dell'altra. Poiché entrambe le componenti di G sono differenziabili segue che $F_{|U}$ è un diffeomorfismo di U su $U = F(U)$.

2) (i) è l'esercizio n. 2.2 del testo [C].
(ii) $\alpha' = (-2cos(t)sin(t), cos(t))$, $\alpha'' = (2sin^2(t) - 2cos^2(t), -sin(t))$. Quindi in $\frac{\pi}{4}$:

$$\alpha' = (1, \frac{\sqrt{2}}{2}); \quad \alpha'' = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}); \quad ||\alpha'|| = \sqrt{3/2};$$

$$T = (-\sqrt{2/3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), N = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{2/3}); \quad \kappa = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

3) Si ha $\alpha(0) = (0, 0, 0)$. Inoltre:

$$\begin{array}{ll} \alpha'(t) = (1, (1+t)e^t, (t^2+2t)e^t) & \alpha'(0) = (1, 1, 0) \\ \alpha''(t) = (0, (2+t)e^t, (2+4t+t^2)e^t) & \alpha''(0) = (0, 2, 2) \\ \alpha'''(t) = (0, (3+t)e^t, (6+6t+t^2)e^t) & \alpha'''(0) = (0, 3, 6) \end{array}$$

Quindi:

$$||\alpha'(0)|| = \sqrt{2}; \quad \alpha'(0) \wedge \alpha''(0) = (2, -2, 2); \quad ||\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)|| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Applicando le formule troviamo:

$$T(0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), \quad B(0) = (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), \quad N(0) = (-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})$$

$$\kappa(0) = \sqrt{3/2}; \quad \tau(0) = \frac{1}{2}$$

p. osc.: $X - Y + Z = 0$; p. normale: $X + Y = 0$; p. rettif.: $-X + Y + 2Z = 0$.

4) A) F è un'affinità e quindi è differenziabile e biunivoca. La sua inversa è anch'essa un'affinità e quindi è differenziabile. Quindi F è un diffeomorfismo. L'affinità inversa è

$$G(x, y) = -\frac{1}{2}(x + 2y - 3, 2x + 2y - 4)$$

B) F è differenziabile in $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ perché entrambe le componenti sono funzioni razionali il cui denominatore di annulla solo in $(0, 0)$. Calcolando si trova che $F \circ F =$ identità. Da ciò segue che F è biunivoca sull'immagine, che $\mathrm{Im}(F) = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ e che F ha inversa differenziabile. Quindi F è un diffeomorfismo.

Compito n. 2 - Soluzione

1)(i) $V = \mathbf{R}^2$ perché entrambe le componenti di F sono polinomi.

$$JF = \begin{pmatrix} -2v & -2u \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

e quindi $det(JF) = 4(u^2 - v^2)$. Pertanto W è il complementare dell'unione delle rette $u - v = 0$ e $u + v = 0$.
(ii) F non è iniettiva perché $F(u,v) = F(-u,-v)$ per ogni $(u,v) \in \mathbf{R}^2$.
(iii) Posto $(x,y) = F(u,v)$, si ha $x + y = (u-v)^2$, $x - y = (u+v)^2$. Prendendo $U = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : u > |v|\}$ si ha $u + v > 0$ e $u - v > 0$ per ogni $(u,v) \in U$ e quindi $F(u,v) \in U$ per ogni $(u,v) \in U$. D'altra parte ponendo

$$G(x,y) = (\frac{1}{2}(\sqrt{x+y} + \sqrt{y-x}), \frac{1}{2}(\sqrt{y-x} - \sqrt{x+y}))$$

si ha $G(F(u,v)) = (u,v)$ per ogni $(u,v) \in U$ e $F(G(x,y)) = (x,y)$ per ogni $(x,y) \in U$. Segue che $F(U) = U$ e F e G sono inverse una dell'altra. Poiché entrambe le componenti di G sono differenziabili segue che $F_{|U}$ è un diffeomorfismo di U su $U = F(U)$.

2) (i) α è differenziabile perché le componenti sono differenziabili. Si ha

$$\alpha' = (-sin(t), 2sin(t)cos(t))$$

che non si annulla in $(0,\pi)$, quindi α è regolare. α è biunivoca sull'immagine perché in $(0,\pi)$ la funzione $cos(t)$ è monotona decrescente. Nell'aperto $(0,\pi) \times \mathbf{R}$ la funzione $(x,y) \mapsto arcos(x)$ è differenziabile ed ha per restrizione a $\alpha(0,\pi)$ l'inversa di α. Quindi α è un diffeomorfismo di $(0,\pi)$ su $\alpha(0,\pi)$.
(ii) $\alpha'' = (-cos(t), 2cos^2(t) - 2sin^2(t))$. Quindi in $\frac{\pi}{4}$:

$$\alpha' = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1); \quad \alpha'' = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0); \quad ||\alpha'|| = \sqrt{3/2};$$

$$T = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2/3}), N = (-\sqrt{2/3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}); \quad \kappa = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

.

3) Si ha $\alpha(0) = (0,0,0)$. Inoltre:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= ((t^2+2t)e^t, (1+t)e^t, 2) & \alpha'(0) &= (0,1,2) \\ \alpha''(t) &= ((2+4t+t^2)e^t, (2+t)e^t, 0) & \alpha''(0) &= (2,2,0) \\ \alpha'''(t) &= ((6+6t+t^2)e^t, (3+t)e^t, 0) & \alpha'''(0) &= (6,3,0) \end{aligned}$$

Quindi:

$$||\alpha'(0)|| = \sqrt{5}; \quad \alpha'(0) \wedge \alpha''(0) = (-4,4,-2); \quad ||\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)|| = 6$$

Applicando le formule troviamo:

$$T(0) = (0, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}), \quad B(0) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}), \quad N(0) = (\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, -\frac{2\sqrt{5}}{15})$$

$$\kappa(0) = \frac{6\sqrt{5}}{25}; \quad \tau(0) = -\frac{1}{3}$$

p. osc.: $-2X + 2Y - Z = 0$; p. normale: $Y + 2Z = 0$; p. rettif.: $5X + 4Y - 2Z = 0$.

4) A) F è un'affinità e quindi è differenziabile e biunivoca. La sua inversa è anch'essa un'affinità e quindi è differenziabile. Quindi F è un diffeomorfismo. L'affinità inversa è

$$G(x, y) = -(x + 2y - 3, x + y - 2)$$

B) vedere compito n. 1.