# Cap. 1. Funzioni analitiche

## 1. SERIE FORMALI DI POTENZE

Sia $T$ una indeterminata. Una *serie formale di potenze* (o semplicemente una *serie formale*) nella $T$ a coefficienti complessi è un'espressione

$$f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots$$

in cui $a_k \in \mathbf{C}$ per ogni $k$. Una serie formale può anche identificarsi con la successione dei suoi coefficienti

$$\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$$

$a_0$ si dice il *termine costante* della serie $f(T)$. Se

$$f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k, \quad g(T) = \sum_{k \geq 0} b_k T^k$$

sono due serie formali, definiamo la loro *somma* $f + g$ come

$$(f+g)(T) = \sum_{k \geq 0} c_k T^k$$

dove

$$c_k = a_k + b_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Definiamo il *prodotto* $fg$ come:

$$(fg)(T) = \sum_{k \geq 0} d_k T^k$$

dove

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Se $\alpha \in \mathbf{C}$ definiamo $\alpha f$ come

$$(\alpha f)(T) = \sum_{k \geq 0} (\alpha a_k) T^k$$

La *serie nulla* è la serie $0(T)$ i cui coefficienti sono tutti uguali a zero.

L'insieme delle serie formali nella $T$ a coefficienti complessi si denota con il simbolo $\mathbf{C}[[T]]$. Con le operazioni di somma e di prodotto che abbiamo introdotto $\mathbf{C}[[T]]$ è un anello contenente $\mathbf{C}[T]$ come sottoanello.

Una serie formale $a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots$ è invertibile in $\mathbf{C}[[T]]$ se e solo se $a_0 \neq 0$. Se infatti esiste $b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \cdots \in \mathbf{C}[[T]]$ tale che

$$(a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots)(b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \cdots) = 1$$

allora $a_0 b_0 = 1$ e quindi $a_0 \neq 0$. Viceversa, se $a_0 \neq 0$ l'inversa $b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \cdots$ di $a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots$ è univocamente individuata dalle condizioni:

$a_0 b_0 = 1$
$a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$
$a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0$
$\cdots\cdots$

che permettono di calcolare induttivamente i coefficienti $b_0, b_1, b_2, \ldots$.

Una serie formale $\sum_{k \geq 0} a_k T^k$ può essere derivata termine a termine ponendo

$$(\sum_{k \geq 0} a_k T^k)' := \sum_{k \geq 1} k a_k T^{k-1}$$

Segue immediatamente dalla definizione che il prodotto di due serie di potenze è uguale a zero se e solo se uno almeno dei fattori è nullo; pertanto $\mathbf{C}[[T]]$ è un dominio di integrità.

Il campo dei quozienti di $\mathbf{C}[[T]]$ si denota $\mathbf{C}((T))$. I suoi elementi si dicono *serie di Laurent formali* nella indeterminata $T$.

(1.1) LEMMA *Ogni elemento non nullo $X \in \mathbf{C}((T))$ può essere scritto in modo unico nella forma*

$$X = T^\nu (a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots) \qquad \nu \in \mathbf{Z},\ a_0 \neq 0$$

*Dimostrazione*
Sia:

$$X = \frac{(b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \cdots)}{(c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + \cdots)}$$

e sia $h \geq 0$ il più piccolo intero tale che $c_h \neq 0$. La serie di potenze $c_h + c_{h+1}T + c_{h+2}T^2 + \cdots$ è invertibile in $\mathbf{C}[[T]]$: sia $d_0 + d_1T + d_2T^2 + \cdots$ la sua inversa. Allora:

$$X = T^{-h}(b_0 + b_1T + b_2T^2 + \cdots)(d_0 + d_1T + d_2T^2 + \cdots)$$

e poiché $(b_0 + b_1T + b_2T^2 + \cdots)(d_0 + d_1T + d_2T^2 + \cdots) \in \mathbf{C}[[T]]$ la conclusione segue. *q.e.d.*

L'intero $\nu$ si chiama *ordine* della serie di Laurent $X$, e si denota $o(X)$. Porremo $o(0) = \infty$. Otteniamo in questo modo un'applicazione:

$$o : \mathbf{C}((T)) \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$$

che possiede le seguenti proprietà, di immediata verifica. Per ogni $X, Y \in \mathbf{C}((T))$ si ha:

$o(XY) = o(X) + o(Y)$
$o(X \pm Y) \geq \min(o(X), o(Y))$ e vale l'uguaglianza se $o(X) \neq o(Y)$.
$X \in \mathbf{C}[[T]]$ se e solo se $o(X) \geq 0$.

In particolare, per ogni $X \neq 0$ si ha $o(X^{-1}) = -o(X)$.

Dal lemma segue che ogni elemento $X \in \mathbf{C}((T))$ si può scrivere in modo unico come una serie di potenze in $T$ a esponenti in $\mathbf{Z}$ avente solo un numero finito di termini con esponente negativo, cioè nella forma:

$$X = a_{-m}T^{-m} + \cdots + a_{-1}T^{-1} + P \qquad a_{-m} \neq 0$$

dove

$$P = \sum_{k \geq 0} a_k T^k \in \mathbf{C}[[T]]$$

L'espressione $a_{-m}T^{-m} + \cdots + a_{-1}T^{-1}$ si chiama *parte principale* di $X$.

## 2. SERIE CONVERGENTI

Sia $\{\alpha_k\}$ una successione di numeri complessi, e consideriamo la serie

$$\sum_{k\geq 0} \alpha_k$$

Definiamo la somma parziale

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$$

Diremo che la serie *converge* se esiste $w \in \mathbf{C}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} s_n = w$$

In tal caso diremo che $w$ è la *somma della serie* e scriveremo:

$$w = \sum_{k\geq 0} \alpha_k$$

Se $A = \sum_{k\geq 0} \alpha_k$ e $B = \sum_{k\geq 0} \beta_k$ sono due serie convergenti allora la loro somma ed il loro prodotto sono serie convergenti. Precisamente, detta

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k$$

la somma parziale della serie $B$, $A \pm B$ ha per somma il $\lim_{n\to\infty} s_n \pm t_n$, mentre $cB$ ha per somma il $\lim_{n\to\infty} ct_n$ per ogni $c \in \mathbf{C}$.

Sia $\sum_{k\geq 0} \alpha_k$ una serie di numeri complessi. Diremo che la serie *converge assolutamente* se la serie a termini reali nonnegativi $\sum_{k\geq 0} |\alpha_k|$ converge.

Se una serie converge assolutamente allora converge. Infatti, per ogni $m \leq n$ si ha:

$$s_n - s_m = \alpha_{m+1} + \cdots + \alpha_n$$

e quindi:

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|$$

Dall'assoluta convergenza segue che dato $\epsilon > 0$ esiste $N$ tale che $\sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k| < \epsilon$ se $m, n \geq N$: ciò dimostra che la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali è di Cauchy nello spazio metrico $\mathbf{C}$, e quindi converge.

Si noti che se $\sum_{k\geq 0} \alpha_k$ converge allora $\lim \alpha_k = 0$: infatti $\alpha_k = s_k - s_{k-1}$ e $\{s_k\}$ è una successione di Cauchy.

Nel seguito utilizzeremo liberamente i seguenti fatti elementari riguardanti l'assoluta convergenza, la cui dimostrazione viene lasciata come esercizio:

(i) (*Criterio del confronto*): Sia $\sum_{k\geq 0} r_k$ una serie convergente di numeri reali non-negativi. Se $\sum_{k\geq 0} \alpha_k$ è una serie di numeri complessi tale che $|\alpha_k| \leq r_k$ per ogni $k$ allora la serie $\sum \alpha_k$ converge assolutamente.

(ii) Se una serie di numeri complessi $\sum_{k\geq 0} \alpha_k$ è assolutamente convergente, allora ogni serie ottenuta riordinando i suoi termini converge assolutamente allo stesso limite.

(iii) Se una serie doppia

$$\sum_{k\geq 0} \Big( \sum_{h\geq 0} \alpha_{hk} \Big)$$

converge assolutamente, allora la serie ottenuta scambiando l'ordine di sommazione converge assolutamente allo stesso limite.

Sia $S$ un insieme ed $f : S \to \mathbf{C}$ una funzione limitata. Definiamo la *norma del sup* di $f$ come:

$$||f||_S = ||f|| = \sup_{s\in S} |f(s)|$$

Segue immediatamente dalla definizione che, date comunque due funzioni limitate $f, g : S \to \mathbf{C}$ e $c \in \mathbf{C}$, si ha $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$ e $||cf|| = |c|\ ||f||$.

Sia $\{f_n : S \to \mathbf{C}\}$ una successione di funzioni limitate. Diremo che questa successione *converge uniformemente in* $S$ se esiste una funzione limitata $f : S \to \mathbf{C}$ con le seguenti proprietà: dato comunque $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$||f_n - f|| < \epsilon$$

se $n \geq N$. Si osservi che, anche senza supporre $f$ limitata, se $||f_n - f||$ è ben definita segue che $f$ è limitata.

Diremo che $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy se dato comunque $\epsilon > 0$ esiste $N > O$ tale che

$$||f_n - f_m|| < \epsilon$$

se $m, n \geq N$.

Si osservi che, se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy, allora per ogni $s \in S$ la successione di numeri complessi $\{f_n(s)\}$ soddisfa:

$$|f_n(s) - f_m(s)| \leq ||f_n - f_m|| \qquad \forall\ \ n, m$$

e quindi è una successione di Cauchy e pertanto converge.

(2.1) TEOREMA *Se una successione* $\{f_n\}$ *di funzioni limitate su* $S$ *è di Cauchy allora converge uniformemente in* $S$.

*Dimostrazione*

Per ogni $s \in S$ poniamo

$$f(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s)$$

Dato $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$|f_n(s) - f_m(s) < \epsilon \qquad \forall \;\; s \in S$$

se $n, m \geq N$. Sia $n \geq N$. Dato $s \in S$ sia $m \geq N$ (dipendente da $s$) tale che

$$|f(s) - f_m(s)| < \epsilon$$

Allora:

$$f(s) - f_n(s)| \leq |f(s) - f_m(s)| + |f_m(s) - f_n(s)| <$$

$$< \epsilon + ||f_m - f_n|| < 2\epsilon$$

Poiché ciò è vero per ogni $s \in S$ segue che

$$||f - f_n|| < 2\epsilon$$

e ciò conclude la dimostrazione. *q.e.d.*

Consideriamo una serie $\sum f_k$ di funzioni limitate su $S$, e sia

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

la somma parziale $n$-esima. Diremo che la serie *converge uniformemente in* $S$ se la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ converge uniformemente in $S$. Diremo che la serie $\sum f_k$ *converge assolutamente in* $s \in S$ se la serie numerica

$$\sum |f_k(s)|$$

converge. Diremo che $\sum f_k$ *converge assolutamente in* $S$ se converge assolutamente in ogni $s \in S$.

(2.2) TEOREMA (Criterio del confronto) *Sia $\{c_k\}$ una successione di numeri reali nonnegativi tale che la serie $\sum c_k$ converga. Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni limitate su $S$ tali che $||f_k|| \leq c_k$ per ogni $k$. Allora la serie $\sum f_k$ converge uniformemente e assolutamente in $S$.*

*Dimostrazione*
Siano $m \leq n$. Allora le somme parziali soddisfano:

$$||s_n - s_m|| \leq \sum_{k=m+1}^{n} ||f_k|| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k$$

L'ipotesi sulla convergenza di $\sum c_k$ implica l'uniforme convergenza della successione delle somme parziali. Lo stesso ragionamento dimostra anche la convergenza assoluta. *q.e.d.*

DEFINIZIONE *Una serie, della forma $\sum_{k\geq 0} ar^k$, $a, r \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, è detta una* serie geometrica.

*PROPOSIZIONE: Una serie geometrica converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$. Nel caso cinvergente si ha:*

$$\sum_{k\geq 0} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

*Dimostrazione*
Esercizio.

La dimostrazione del risultato seguente è lasciata come esercizio:

(2.3) TEOREMA *Sia $S \subset \mathbf{C}$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue e limitate su $S$. Se la successione converge uniformemente in $S$ allora la funzione limite $f$ è continua in $S$.*

I risultati precedenti verranno applicati allo studio della convergenza di serie di potenze, prendendo $f_k(z) = a_k z^k$, dove $a_k \in \mathbf{C}$.

(2.4) TEOREMA *Sia $\{a_k\}$ una successione di numeri complessi, e sia $r > 0$ tale che la serie*

$$\sum_{k\geq 0} |a_k| r^k$$

*converga. Allora la serie $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ converge assolutamente e uniformemente nel disco chiuso $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq r\}$.*

*Dimostrazione*

È una caso particolare del criterio del confronto. *q.e.d.*

(2.5) TEOREMA *Sia $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ una serie di potenze. Se la serie non converge assolutamente per qualche $z \in \mathbf{C}$ allora esiste un numero reale $r \geq 0$ tale che la serie converga assolutamente per $|z| < r$ e non converga assolutamente per $|z| > r$.*

*Dimostrazione*

Sia $r$ l'estremo superiore dei numeri reali $s \geq 0$ tali che $\sum |a_k| s^k$ converge. Allora per ipotesi $r < \infty$ e $\sum |a_k||z|^k$ diverge se $|z| > r$, e converge se $|z| < r$, per il criterio del confronto *q.e.d.*

Il numero $r$ del teorema (2.5) è chiamato *raggio di convergenza* della serie di potenze $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$. Se la serie converge assolutamente per ogni $z \in \mathbf{C}$ allora diremo che ha *raggio di convergenza infinito*. Quando il raggio di convergenza è 0 la serie converge assolutamente solo per $z = 0$.

Se la serie ha raggio di convergenza $r > 0$ si dirà una *serie convergente*. Il disco aperto $D_r(0)$ di centro l'origine e raggio $r$ è detto *disco di convergenza* della serie. Più in genereale se $D$ è un disco aperto di centro l'origine e di raggio $\leq r$, diremo che la serie *converge in* $D$.

(2.6) TEOREMA *Sia $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ una serie di potenze, e sia $r$ il suo raggio di convergenza. Allora*

$$\frac{1}{r} = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

*intendendo che la successione $|a_k|^{\frac{1}{k}}$ non è limitata se $r = 0$, e che $\limsup |a_k|^{\frac{1}{k}} = 0$ se $r = \infty$.*

*Dimostrazione*

Supponiamo dapprima $r \neq 0, \infty$, e sia $t = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}$. Dato comunque $\epsilon > 0$ esiste solo un numero finito di indici $k$ tali che $|a_k|^{\frac{1}{k}} \geq t + \epsilon$. Quindi per tutti i $k$ eccettuati al più un numero finito si ha:

$$|a_k| \leq (t + \epsilon)^k$$

e quindi se $|z| < \frac{1}{t+\epsilon}$, posto $A = |z|(t + \epsilon)$ si ha:

$$|a_k||z^k| < A^k$$

Pertanto la serie $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ converge assolutamente per confronto con la serie geometrica $\sum A^k$. Deduciamo che il raggio di convergenza $r$ soddisfa $r \geq \frac{1}{t+\epsilon}$ per ogni $\epsilon > 0$ e quindi $r \geq \frac{1}{t}$.

Viceversa, dato $\epsilon > 0$ esistono infiniti $k$ tali che $|a_k|^{\frac{1}{k}} \geq t - \epsilon$ e pertanto

$$|a_k| \geq (t - \epsilon)^k$$

Quindi la serie $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ non converge se $|z| = \frac{1}{t-\epsilon}$ perché il suo termine $k$-esimo non tende a 0. Ne consegue che il raggio di convergenza $r$ soddisfa $r \leq \frac{1}{t-\epsilon}$ per ogni $\epsilon > 0$, donde $r \leq \frac{1}{t}$. Ciò conclude la dimostrazione nel caso $t \neq 0, \infty$. Il caso in cui $t = 0$ oppure $t = \infty$ si dimostra in modo simile ed è lasciato come esercizio. *q.e.d.*

ESEMPIO - Il teorema precedente non dice cosa accade se $|z| = r$. Ad esempio la serie $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n$ ha raggio di convergenza 1 e $f(c)$ converge per ogni $c \neq 1$ tale che $|c| = 1$.

Consideriamo invece la serie $f(z) = \sum_{k\geq 1} z^{2^k}$, che ha anche raggio di convergenza 1. Detta

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z^{2^k}$$

la somma parziale $n$-esima, si ha

$$\lim_{x \text{ reale } \to 1} s_x(x) = n$$

e quindi

$$\lim_{x \text{ reale } \to 1} f(x) = \infty$$

perché per ogni $n > 0$ esiste $\delta_n > 0$ tale che per $x > 1 - \delta$ si ha $s_n(x) > n - 1$ e quindi $f(x) > n - 1$. D'altra parte $f(z) = z^2 + f(z^2)$ e quindi

$$\lim_{x \text{ reale } \to -1} f(x) = \infty$$

Analogamente, avendosi

$$f(z) = z^2 + z^4 + \cdots + z^{2^n} + f(z^{2^n})$$

si ha

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \infty$$

se $\xi$ è una radice $2n$-esima di 1. Poiché le radici $2n$-esime dell'unità sono dense in $S^1$ la funzione $f$ somma della serie non si estende a nessun punto di $\partial D_1 = S^1$.

(2.7) COROLLARIO *Se* $\lim |a_k|^{\frac{1}{k}} = t$ *esiste, allora la serie* $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ *ha raggio di convergenza* $r = \frac{1}{t}$.

*Dimostrazione*
Segue subito dalla dimostrazione del teorema. *q.e.d.*

(2.8) COROLLARIO *Si supponga che la serie* $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ *abbia raggio di convergenza* $r > 0$. *Allora esiste un numero reale* $A > 0$ *tale che*

$$|a_k| \leq A^k$$

*per ogni* $k$.

*Dimostrazione*
Prendiamo $A_1 = t + \epsilon$ dove $t = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}$ e $\epsilon > 0$. Allora

$$|a_k| \leq A_1^k$$

per ogni $k$ eccettuato al più un numero finito. Allora è possibile sostituire $A_1$ con un $A$ in modo che la disuguaglianza sia verificata per tutti i $k$. *q.e.d.*

Utilizzeremo anche il seguente criterio di convergenza, per la cui dimostrazione rinviamo ad un testo di analisi matematica.

(2.9) CRITERIO DEL RAPPORTO *Sia* $\{a_k\}$ *una successione di numeri reali positivi, e supponiamo che* $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = t \geq 0$. *Allora si ha anche*

$$\lim a_k^{\frac{1}{k}} = t$$

## 3. OPERAZIONI SULLE SERIE CONVERGENTI

In questo paragrafo verificheremo che se si eseguono le operazioni definite per le serie formali (somma, prodotto, moltiplicazione per uno scalare, inversa) su serie convergenti, si ottengono ancora serie convergenti.

(3.1) PROPOSIZIONE *Siano $f = f(T)$ e $g = g(T)$ serie di potenze convergenti in un disco aperto $D_r(0)$, allora anche $f + g$ e $fg$ sono convergenti nello stesso disco, e se $\alpha \in \mathbf{C}$, allora $\alpha f$ converge in $D_r(0)$. Inoltre per ogni $z \in D_r(0)$ si ha:*

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z), \quad (fg)(z) = f(z)g(z), \quad (\alpha f)(z) = \alpha f(z)$$

*Dimostrazione*

Diamo la dimostrazione nel caso del prodotto. Siano $f = \sum_{k \geq 0} a_k T^k$, $g = \sum_{k \geq 0} b_k T^k$, e quindi

$$fg = \sum_{k \geq 0} c_k T^k, \quad \text{dove} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Sia $0 < s < r$. Poiché sia $f$ che $g$ hanno raggio di convergenza $\geq r$, per il criterio della radice esiste un numero positivo $C$ tale che

$$|a_k| \leq \frac{C}{s^k}, \quad \text{e} \quad |b_k| \leq \frac{C}{s^k}$$

per ogni $k$. Quindi:

$$|c_k| \leq \sum_{i=0}^{k} |a_i| \; |b_{k-i}| \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{C}{s^i} \frac{C}{s^{k-i}} = (k+1) \frac{C^2}{s^k}$$

Segue che:

$$|c_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{(k+1)^{\frac{1}{k}} C^{\frac{2}{k}}}{s}$$

Ma poiché $\lim_{k \to \infty} (k+1)^{\frac{1}{k}} C^{\frac{2}{k}} = 1$, segue che

$$\limsup_{k \to \infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{s}$$

Poiché ciò è vero per ogni $0 < s < r$ segue che $\limsup |c_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{r}$, e quindi la serie $fg$ converge nel disco $D_r(0)$.

Si osservi che abbiamo anche dimostrato che la serie a termini reali positivi

$$\sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{i=0}^{k}|a_i|\ |b_{k-i}|\Big)|z^k|$$

converge per ogni $z \in D_r(0)$.

Siano

$$f_N(T) = a_0 + a_1T + \cdots + a_Nt^N$$

e

$$g_N(T) = b_0 + b_1T + \cdots + b_NT^N$$

i polinomi ottenunti per troncazione delle serie $f$ e $g$. Allora, per ogni $z \in D_r(0)$ si ha:

$$f(z) = \lim_{N\to\infty} f_N(z), \quad g(z) = \lim_{N\to\infty} g_N(z)$$

Inoltre:

$$|(fg)(z) - f_N(z)g_N(z)| \leq \sum_{k\geq N+1}\Big(\sum_{i=0}^{k}|a_i|\ |b_{k-i}|\Big)|z^k|$$

ed il secondo membro tende a 0 al tendere di $N \to \infty$. Pertanto:

$$f(z)g(z) = \lim_N f_N(z)g_N(z) = (fg)(z)$$

e ciò conclude la dimostrazione nel caso del prodotto.

Gli altri casi sono più semplici e vengono lasciati come esercizio. *q.e.d.*

Denotiamo con $\mathbf{C}\{\{T\}\}$ il sottoinsieme di $\mathbf{C}[[T]]$ costituito dalle serie aventi raggio di convergenza positivo. Dalla proposizione precedente segue che $\mathbf{C}\{\{T\}\}$ è un sottoanello di $\mathbf{C}[[T]]$, che si chiama *anello delle serie convergenti.* Si hanno ovvie inclusioni che sono omomorfismi di anelli:

$$\mathbf{C}[T] \subset \mathbf{C}\{\{T\}\} \subset \mathbf{C}[[T]]$$

(3.2) PROPOSIZIONE *Sia $f$ una serie di potenze a raggio di convergenza positivo con $o(f) = 0$. Allora anche la serie $g$ tale che $fg = 1$ ha raggio di convergenza positivo.*

*Dimostrazione*

Per la (3.1) non è restrittivo supporre che $f$ abbia termine costante uguale a 1, salvo sostituire $f$ con $a_0^{-1}f$. Quindi:

$$f(T) = 1 + a_1T + a_2T^2 + \cdots = 1 - h(T)$$

dove $o(h) \geq 1$. Per il corollario (2.8) esiste $A > 0$ tale che $|a_k| \leq A^k$ per ogni $k \geq 1$. Allora:

$$\frac{1}{f(T)} = \frac{1}{1-h(T)} = 1 + h(T) + h(T)^2 + \cdots$$

dove la somma a secondo membro è ben definita perché $o(h(T)^j) \geq j$ e quindi, per ogni $k$, al coefficiente di $T^k$ a secondo membro contribuiscono solo un numero finito di addendi. La serie $h(T)$ è dominata termine a termine in modulo dalla serie

$$\sum_{k\geq 1} A^k T^k = \frac{AT}{1-AT}$$

e quindi $g(T) = \frac{1}{f(T)}$ è dominata termine a termine in modulo dalla serie

$$1 + \frac{AT}{1-AT} + \frac{(AT)^2}{(1-AT)^2} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{AT}{1-AT}}$$

Ma:

$$\frac{1}{1-\frac{AT}{1-AT}} = (1-AT)(1+2AT+(2AT)^2+\cdots)$$

che è dominata termine a termine in modulo da:

$$(1+AT)(1+2AT+(2AT)^2+\cdots)$$

Perciò $g(T)$ è dominata termine a termine in modulo da un prodotto di serie di potenze aventi raggio di convergenza positivo, e pertanto ha raggio di convergenza positivo. *q.e.d.*

Il seguente corollario è immediato.

(3.3) COROLLARIO *Se $f(T)$ e $g(T)$ sono serie aventi raggio di convergenza positivo e $o(g) = 0$, allora $\frac{f(T)}{g(T)}$ è una serie a raggio di convergenza positivo.*

(3.4) PROPOSIZIONE *Sia $f(T) = \sum_{k\geq 0} a_k T^k$ una serie avente raggio di convergenza $r > 0$. Allora la serie*

$$f'(T) = \sum_{k\geq 1} k a_k T^{k-1}$$

*ottenuta derivando $f$ termine a termine (la serie derivata di $f$) ha raggio di convergenza $r$.*

*Dimostrazione*

Si ha

$$\limsup |ka_k|^{\frac{1}{k}} = \limsup |k|^{\frac{1}{k}} \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}} = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{r}$$

e quindi la serie

$$\sum_{k\geq 1} ka_k T^k = Tf'(T)$$

ha raggio di convergenza uguale a $r$. La conclusione segue. *q.e.d.*

Siano $f(T) = \sum_{k\geq 0} a_k T^k$, $h(T) = \sum_{j\geq 1} b_j T^j$ due serie formali, con $o(h) \geq 1$. Allora è ben definita la serie formale $f(h(T))$, che si dice *composizione di $f$ ed $h$*, ottenuta per sostituzione di $h$ in $f$, cioè ponendo:

$$f(h(T)) = \sum_{k\geq 0} a_k h(T)^k = \sum_{k\geq 0} a_k (\sum_{j\geq 1} b_j T^j)^k$$

Infatti per ogni $k \geq 0$ si ha $o(h(T)^k) \geq k$, e quindi il coefficiente di $T^k$ in $f(h(T))$ è ben definito come somma di un numero finito di termini, per ogni $k \geq 0$. La serie $f(h(T))$ si denota anche $(f \circ h)(T)$. È immediato che il suo ordine è

$$o(f \circ h) = o(f)\ o(h)$$

(3.5) TEOREMA *Supponiamo che $f(T) = \sum_{k\geq 0} a_k T^k$ e $h(T) = \sum_{j\geq 1} b_j T^j$ siano serie di potenze con $o(h) > 0$, aventi raggio di convergenza positivo, e sia*

$$g(T) = f(h(T))$$

*Sia $r > 0$ tale che $f$ converga nel disco $D_r(0)$, ed $s > 0$ sia tale che*

$$\sum_{k\geq 1} |b_k| s^k < r$$

*Allora $g$ converge nel disco $D_s(0)$, e per ogni $z \in D_s(0)$ si ha:*

$$g(z) = f(h(z))$$

*Dimostrazione*

Ogni coefficiente della serie $g(T)$ è dominato in modulo dal corrispondente coefficiente della serie

$$\sum_{k\geq 0}|a_k|(\sum_{j\geq 1}|b_j|T^j)^k \tag{1}$$

e per ipotesi la serie a secondo membro converge assolutamente per $|z| < s$. Quindi $g(z)$ converge assolutamente per $|z| < s$.

Poniamo

$$f_N(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_N T^N$$

Allora ogni coefficiente della serie $g(T) - f_N(h(T))$ è dominato in modulo dal corrispondente coefficiente della serie:

$$\sum_{k>N}|a_k|(\sum_{j\geq 1}|b_j|T^j)^k$$

Dalla convergenza assoluta della serie (1) deduciamo che, dato $\epsilon > 0$, esiste $N_0$ tale che per ogni $N \geq N_0$ e $|z| \leq s$ si abbia:

$$|g(z) - f_N(h(z))| < \epsilon$$

Poiché la successione di polinomi $\{f_N(z)\}$ converge uniformemente alla funzione $f(z)$ nel disco chiuso di raggio $r$, possiamo scegliere $N_0$ sufficientemente grande in modo che per $N \geq N_0$ si abbia

$$|f_N(h(z)) - f(h(z))| < \epsilon$$

e con ciò si dimostra che

$$|g(z) - f(h(z))| < 2\epsilon$$

per ogni $\epsilon > 0$, e quindi $g(z) - f(h(z)) = 0$. *q.e.d.*