4. FUNZIONI ANALITICHE

Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto. Una funzione

$$f : U \to \mathbf{C}$$

si dice *analitica in un punto* $z_0 \in U$ se esiste una serie di potenze

$$\sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$$

che converge assolutamente per $|z - z_0| < r$ per qualche $r > 0$, e tale che si abbia

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$$

per ogni z siffatto. f si dice *analitica in* U se lo è in ogni punto di U.

Se f è analitica in z_0 diremo anche che f *ha un'espansione (o uno sviluppo) in serie di potenze* in z_0. Un punto z_0 tale che $f(z_0) = 0$ si dice uno *zero* di f.

L'insieme delle funzioni analitiche in U si denota $H(U)$.

Le funzioni appartenenti a $H(\mathbf{C})$, cioè analitiche in tutto il piano, si dicono *funzioni intere*. Sono funzioni intere i polinomi (in particolare le funzioni lineari, cioè della forma $f(z) = az + b$), la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche, che verranno introdotte tra poco.

(4.1) PROPOSIZIONE: *(i) Se* $f, g \in H(U)$ *e* $\alpha \in \mathbf{C}$, *allora* $f + g,\ fg,\ \alpha f \in H(U)$. *Inoltre* $\frac{f}{g}$ *è definita ed analitica in ogni aperto contenuto nel sottoinsieme degli* $z \in U$ *tali che* $g(z) \neq 0$.

(ii) Se $V \subset \mathbf{C}$ *è un aperto e* $h : V \to U$ *ed* $f : U \to \mathbf{C}$ *sono analitiche, allora* $f \circ h$ *è analitica in* V.

Dimostrazione

(i) segue immediatamente dalle proprietà di convergenza dimostrate per le serie di potenze nel §3.

(ii) Se $z_0 \in V$ e $h(z_0) = w_0$, allora:

$$h(z) = w_0 + \sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^k$$

e quindi la funzione $h(z) - w_0$ è rappresentata in un intorno di z_0 da una serie priva di termine costante. Se

$$f(w) = \sum_{n \geq 0} a_n (w - w_0)^n$$

in un intorno di w_0 allora applicando il teorema (3.5) possiamo sostituire la serie $h(z) - w_0 = \sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^k$ al posto di $w - w_0$ e ottenere:

$$f(h(z)) = \sum_{n \geq 0} a_n (\sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^k)^n$$

che è uno sviluppo in serie di $f \circ h$ in un intorno di z_0. *q.e.d.*

Dalla (4.1) segue in particolare che una funzione razionale $\frac{P(z)}{Q(z)}$, dove $P, Q \in \mathbf{C}[z]$ e $\neq 0$, è ben definita ed analitica in tutti i punti di $z \in \mathbf{C}$ in cui $Q(z) \neq 0$.

(4.2) TEOREMA *Se $f \in H(U)$ allora f è continua in U.*

Dimostrazione

Segue facilmente dal teorema (2.3). Diamo comunque una dimostrazione diretta del teorema.

Sia $a \in U$ ed $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - a)^k$ in un disco aperto $D_r(a)$ di centro a e raggio $r > 0$; sia $f(a) = b$. Non è restrittivo supporre $a = 0 = b$. Quindi:

$$f(z) = \sum_{k \geq 1} a_k z^k = z \sum_{k \geq 1} a_k z^{k-1}$$

Se $|z| < r$ la serie $\sum_{k \geq 1} a_k z^k$ converge assolutamente e quindi altrettanto avviene per la serie $\sum_{k \geq 1} a_k z^{k-1}$. Pertanto, se $0 < \rho < r$ e $|z| < \rho$ si ha:

$$|f(z)| \leq |z| \sum_{k \geq 1} |a_k| \rho^{k-1}$$

e quindi $|f(z)|$ tende a 0 al tendere di $|z|$ a 0. *q.e.d.*

La seguente proposizione ci dice che sono analitiche le funzioni definite da serie di potenze.

(4.3) PROPOSIZIONE *Sia* $a \in \mathbf{C}$ *e* $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k(z-a)^k$ *una serie di potenze convergente assolutamente nel disco aperto* $D_r(a)$ *per qualche* $r > 0$. *Allora la funzione* $f : D_r(a) \to \mathbf{C}$ *definita dalla serie è analitica.*

Dimostrazione

Non è restrittivo supporre $a = 0$, e quindi che si abbia $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ in $D_r(0)$. Sia $z_0 \in D_r(0)$, e sia $s > 0$ tale che $|z_0| + s < r$. Scriviamo

$$z = z_0 + (z - z_0)$$

e quindi:

$$z^k = [z_0 + (z - z_0)]^k$$

Possiamo pertanto riscrivere:

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k \Big[\sum_{j \geq 0}^{k} \binom{k}{j} z_0^{k-j} (z - z_0)^j \Big]$$

Se $|z - z_0| < s$ allora $|z_0| + |z - z_0| < r$ e quindi la serie

$$\sum_{k \geq 0} |a_k| [|z_0| + |z - z_0|]^k = \sum_{k \geq 0} |a_k| \Big[\sum_{j \geq 0}^{k} \binom{k}{j} |z_0|^{k-j} |z - z_0|^j \Big]$$

converge. Scambiando l'ordine di sommatoria otteniamo che la serie:

$$\sum_{j \geq 0} \Big[\sum_{k \geq j} a_k \binom{k}{j} z_0^{k-j} \Big] (z - z_0)^j$$

converge assolutamente ad $f(z)$ per $|z - z_0| < s$. *q.e.d.*

(4.4) DEFINIZIONE *Una funzione* $f : U \to \mathbf{C}$ *si dice* derivabile in senso complesso, *o* olomorfa, *in un punto* $a \in U$ *se esiste il*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

In tal caso esso si denota $f'(a)$. f *si dice* derivabile in senso complesso *o* olomorfa *in* U *se lo è in ogni punto di* U.

(4.5) TEOREMA *Se* f *è analitica in* U *allora* f *è olomorfa in* U *e la sua derivata* f' *è una funzione analitica in* U.

Dimostrazione

Sia $a \in U$ e sia $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z-a)^k$ in un disco aperto $D_r(a)$, $r > 0$. Per la proposizione (3.4) la serie $\sum_{k\geq 1} ka_k(z-a)^{k-1}$ converge assolutamente in $D_r(a)$ ad una funzione analitica che chiameremo $g(z)$. Siano $z, w \in D_r(a)$, $w \neq z$, e sia

$$|w-a|, |z-a| < \rho < r$$

Allora, si ha:

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \sum_{k\geq 2} a_k \Big[\frac{(z-a)^k-(w-a)^k}{z-w} - k(w-a)^{k-1}\Big] =$$

(ponendo $t = z - a$, e $v = w - a$)

$$= \sum_{k\geq 2} a_k \Big[\frac{t^k - v^k}{t-v} - kv^{k-1}\Big] = \sum_{k\geq 2} a_k \big[(t^{k-1} + t^{k-2}v + \cdots + tv^{k-2} + v^{k-1}) - kv^{k-1}\big] =$$

$$= \sum_{k\geq 2} a_k \big[t^{k-1} + t^{k-2}v + \cdots + tv^{k-2} - (k-1)v^{k-1}\big] =$$

$$= \sum_{k\geq 2} a_k \big[(t-v)(t^{k-2} + 2t^{k-3}v + \cdots + (k-2)tv^{k-3} + (k-1)v^{k-2}\big] =$$

$$= \sum_{k\geq 2} a_k \Big[(t-v)\sum_{j=1}^{k-1} jt^{k-1-j}v^{j-1}\Big]$$

Allora, essendo $|t| < \rho$ e $|v| < \rho$, abbiamo:

$$|t-v|\Big|\sum_{j=1}^{k-1} jt^{k-1-j}v^{j-1}\Big| \leq |z-w|\frac{k(k-1)}{2}\rho^{k-2}$$

e pertanto:

$$\Big|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)\Big| \leq \frac{1}{2}|z-w|\sum_{k\geq 2}|a_k|k(k-1)\rho^{k-2}$$

La serie a secondo membro è la serie dei moduli, calcolata in $z = \rho$, della derivata seconda della serie $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$, e quindi converge. Pertanto il secondo membro tende a 0 per $z \to w$. Ciò dimostra che f è derivabile in ogni punto di $D_r(a)$ e che la sua derivata coincide con la funzione analitica g. Ciò conclude la dimostrazione. *q.e.d.*

Osservazione. Usando il teorema integrale di Cauchy (che non dimostreremo), è possibile far vedere che, viceversa, ogni funzione olomorfa è analitica. Noi utilizzeremo questo fatto solo in una circostanza (e cioè per la dimostrazione del teorema (6.2)), mentre per il resto tutto quello che diremo sarà indipendente dal teorema di Cauchy.

Il seguente corollario dicende immediatamente dal teorema:

(4.6) COROLLARIO *Se $f \in H(U)$ allora f possiede derivate di ogni ordine che sono funzioni analitiche in U.* *q.e.d.*

Supponiamo che la funzione $f(z)$ sia analitica in un intorno di $a \in \mathbf{C}$ e che in a si abbia:

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z-a)^k$$

Allora dalla dimostrazione del teorema (4.5) segue che la derivata n-esima di f si esprime in un intorno di a come:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k \geq n} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k (z-a)^{k-n}$$

In particolare si ha:

$$f^{(n)}(a) = n! a_n$$

e quindi per ogni n:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad [4.1]$$

In particolare la successione dei coefficienti $\{a_k\}$ è univocamente determinata da f e da a.

È facile verificare che le regole usuali di derivazione si applicano alle funzioni olomorfe. Così ad esempio si ha:

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \end{aligned}$$

per ogni scelta di f, g olomorfe. In particolare si ha:

$$(z^n)' = n z^{n-1}$$

per ogni $n \in \mathbf{Z}$. Similmente si ha:

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) g'(z)$$

se g è olomorfa in un intorno di $z \in \mathbf{C}$, ed f è olomorfa in un intorno di $g(z)$.

(4.7) DEFINIZIONE *sia $f : U \to \mathbf{C}$ una funzione sull'aperto U a valori complessi. Una primitiva per f è una funzione g olomorfa in U e tale che $g'(z) = f(z)$ per ogni $z \in U$.*

È ovvio che una primitiva, se esiste, è determinata a meno di una costante additiva.

(4.8) PROPOSIZIONE *Sia f una funzione analitica che ha uno sviluppo in serie in un disco $D_r(a)$. Allora f possiede una primitiva in $D_r(a)$.*

Dimostrazione
Supponiamo che si abbia

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z-a)^k$$

in $D_r(a)$. Allora la serie

$$\sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k+1} (z-a)^{k+1} \qquad [4.2]$$

converge nel disco $D_r(a)$ perché i suoi coefficienti sono maggiorati in modulo dai coefficienti della serie $f(z)$. Inoltre, detta $g(z) \in H(D_r(a)$ la funzione somma della serie [4.2], si ha $g'(z) = f(z)$. Quindi g è una primitiva di f in $D_r(a)$. *q.e.d.*

Osservazione: Se $f \in H(U)$, dove U è un aperto di $\mathbf{C}$, la proposizione (4.8) implica che per ogni punto $a \in U$ esiste un disco $D_r(a) \subset U$ tale che la restrizione di f a $D_r(a)$ possieda una primitiva. Ciò non significa però che f possiede una primitiva in tutto U. In altre parole, non è necessariamente vero che è possibile trovare primitive di f nelle vicinanze di ogni punto di U in modo che si incollino per definire un'unica funzione primitiva di f in tutto U. Un esempio è fornito dalla funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ analitica in $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. Infatti ogni sua primitiva locale, cioè nell'intorno di un punto di $\mathbf{C}\backslash\{0\}$, deve infatti differire per una costante additiva da una determinazione del log(z) (si veda la discussione del logaritmo complesso qui sotto). Ma, come spiegato nell'esempio che segue, una tale determinazione non può essere definita in tutto $\mathbf{C}\backslash\{0\}$.

oooooooooo

ESEMPI:

La funzione $\frac{1}{1-z}$ Dalla proposizione (4.1) segue che la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

è analitica nell'aperto $U = \mathbf{C}\backslash\{0\}$. Il suo sviluppo in serie nell'origine è

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} z^k$$

Questa serie ha raggio di convergenza $r_0 = 1$ e quindi rappresenta la funzione f nel disco $D_1(0)$. Consideriamo un qualsiasi punto $b \in D_1(0)$, $b \neq 0$. Dalla dimostrazione della proposizione (4.3) segue che lo sviluppo in serie di $f(z)$ in b è:

$$f(z) = \sum_{j\geq 0} b_j (z-b)^j$$

dove

$$b_j = \sum_{k\geq j} \binom{k}{j} b^{k-j}$$

Questa serie converge a $(1-b)^{-(j+1)}$ e pertanto lo sviluppo in serie di $f(z)$ in b si può riscrivere come:

$$f(z) = \sum_{j\geq 0} (1-b)^{-(j+1)}(z-b)^j$$

Il raggio di convergenza r_b di questa serie è dato da:

$$\frac{1}{r_b} = \lim_{j\to\infty} (|1-b|^{-(j+1)})^{\frac{1}{j}} = |1-b|^{-1}$$

cioè $r_b = |1-b|$, che è la distanza di b dal punto 1 in cui la funzione $f(z)$ non è definita. Si osservi che $D_{r_b}(b) \not\subset D_1(0)$ a meno che b non sia reale e $0 < b < 1$.

La funzione esponenziale e il logaritmo

Vogliamo determinare quali sono le serie di potenze

$$E(T) = \sum_{k\geq 0} a_k T^k \in \mathbf{C}[[T]]$$

tali che $E'(T) = E(T)$, e $E(0) = a_0 = 1$.

Poiché

$$E'(T) = a_1 + 2a_2 T + 3a_3 T^2 + \cdots$$

otteniamo $a_{k-1} = ka_k$ e $a_0 = 1$, e quindi deduciamo $a_k = \frac{1}{k!}$. In particolare la serie cercata $E(T)$ esiste ed è unica. Si ha:

$$E(T) := \sum_{k\geq 0} \frac{T^k}{k!}$$

Poiché $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!} = \infty$, vediamo che $E(T)$ ha raggio di convergenza $r = \infty$. La *funzione esponenziale* e^z è la funzione olomorfa in tutto $\mathbf{C}$ somma della serie $E(z)$.

È facile dedurre le principali proprietà di e^z direttamente dalla definizione. Dimostriamo ad esempio l'identità

$$e^{a+b} = e^a \; e^b \qquad \forall a, b$$

Sia $c \in \mathbf{C}$. Si ha:

$$(e^z \; e^{c-z})' = e^z \; e^{c-z} - e^z \; e^{c-z} = 0$$

e quindi $e^z \; e^{c-z} =$ cost.; prendendo $z = 0$ deduciamo che $e^z \; e^{c-z} = e^c$, e ponendo $z = a$ e $c = b + a$ si conclude.

In particolare $e^z \; e^{-z} = e^0 = 1$ e quindi $e^z \neq 0$ per ogni z e $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

Inoltre $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ perché tutti i coefficienti di $E(z)$ sono reali. In particolare, se $y \in \mathbf{R}$:

$$|e^{\mathrm{i}y}| = e^{\mathrm{i}y} \; e^{-\mathrm{i}y} = 1$$

Inoltre, essendo $e^{x+iy} = e^x \; e^{\mathrm{i}y}$,si ha $|e^{x+iy}| = e^x$, e quindi $|e^{x+iy}| = 1$ se e solo se $x = 0$ cioè se e solo se $z = \mathrm{i}y$ è puramente immaginario.

Per mezzo della funzione esponenziale è possibile definire le *funzioni trigonometriche* ponendo:

$$\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}; \quad \mathrm{sen}(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

Dalle definizioni si deducono facilmente tutte le principali proprietà di queste funzioni. In particolare:

$$\cos(z)' = -\mathrm{sen}(z); \quad \mathrm{sen}(z)' = \cos(z)$$

$$\mathrm{sen}(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$$

Si ha inoltre

$$e^{\mathrm{i}y} = \cos(y) + \mathrm{i}\;\mathrm{sen}(y) \qquad y \in \mathbf{R}$$

Calcolando si trovano gli sviluppi in serie:

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

$$\mathrm{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

Per $z = x$ reale queste serie si riducono agli usuali sviluppi in serie di Taylor di $\cos(x)$ e $\mathrm{sen}(x)$, e quindi le funzioni trigonometriche complesse prolungano a $\mathbf{C}$ le funzioni trigonometriche già conosciute nel caso reale.

Studiamo la *periodicità* di e^z. Sia $p \in \mathbf{C}$ un periodo, cioè un numero complesso tale che $e^{z+p} = e^z$ per ogni $z \in \mathbf{C}$. Ciò avviene se e solo se $e^p = 1$. Quindi $p = \mathrm{i}t$, t reale. D'altra parte

$$e^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\;\mathrm{sen}(t) = 1$$

significa $\cos(t) = 1, \;\; \mathrm{sen}(t) = 0$, il che avviene se e solo se $t = 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$.

Quindi i periodi di e^z sono tutti e soli i multipli interi di $2\pi\mathrm{i}$.

Sia $w \in \mathbf{C}$. Un *logaritmo* di w è un numero complesso z tale che $e^z = w$. Ovviamente, poiché $e^z \neq 0$ il numero $w = 0$ non ha logaritmo. Se $w \neq 0$ allora l'equazione $e^{x+\mathrm{i}y} = w$ è equivalente a

$$e^x = |w|, \quad e^{\mathrm{i}y} = \frac{w}{|w|}$$

La prima equazione possiede l'unica soluzione $x = \log(|w|)$. La seconda equazione ha infinite soluzioni della forma $y = \theta + 2k\pi$. Ogni tale soluzione è detta una *determinazione dell'argomento* di w, e si denota $\arg(w)$.

In conclusione, ogni $w = |w|(\cos(\theta) + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}(\theta)) \neq 0$ possiede infiniti logaritmi, della forma:

$$\log(w) = \log(|w|) + \mathrm{i}\ (\theta + 2k\pi)$$

$k \in \mathbf{Z}$.

5. ZERI DI UNA FUNZIONE ANALITICA

In questo paragrafo dimostreremo che due funzioni analitiche che coincidono su un insieme abbastanza grande, in un senso che preciseremo, coincidono identicamente. Questa proprietà generalizza una proprietà ben nota dei polinomi: se due polinomi di grado $\leq n$ assumono gli stessi valori in $n+1$ punti distinti di $\mathbf{C}$, allora concidono.

Iniziamo con un primo risultato del tipo indicato.

(5.1) TEOREMA (Principio del prolungamento analitico): *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso, $z_0 \in U$, ed $f \in H(U)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) $f^{(k)}(z_0) = 0$ per ogni $k \geq 0$.
(ii) f è identicamente nulla in un intorno di z_0.
(iii) f è identicamente nulla in U.

Dimostrazione

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$ lo sviluppo in serie di f in z_0. Dalla [4.1] segue che $a_k = 0$ per ogni k, e quindi $f(z) = 0$ in un intorno di z_0.

(ii) $\Rightarrow$ (i) e (iii) $\Rightarrow$ (i) sono ovvie.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Dobbiamo dimostrare che l'insieme

$$\Delta = \{a \in U : f \text{ è identicamente nulla in un intorno di } a\}$$

coincide con U. Osserviamo che $z_0 \in \Delta$ e quindi $\Delta \neq \emptyset$. Pertanto, poiché U è connesso, sarà sufficiente dimostrare che Δ è aperto e chiuso in U.

Δ è aperto per definizione.

Sia $c \in \overline{\Delta}$. Allora esiste una successione $\{c_n\} \to c$ tale che $c_n \in \Delta$. In ogni punto c_n è verificata la condizione (ii), e quindi anche la (i), cioè $f^{(k)}(c_n) = 0$ per ogni $k \geq 0$ e per ogni n. Ma allora, essendo le derivate $f^{(k)}(z)$ funzioni continue, si ha anche $f^{(k)}(c) = 0$ per ogni k, cioè in c è soddisfatta la condizione (i). Ma allora anche la (ii) è soddisfatta, cioè $c \in \Delta$, e quindi Δ è chiuso. *q.e.d.*

(5.2) COROLLARIO *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso. Se $f, g \in H(U)$ coincidono in un intorno di un punto $z_0 \in U$ allora coincidono identicamente in tutto U.*

Dimostrazione

Basta applicare il teorema alla funzione $f - g$. *q.e.d.*

Sia f una funzione analitica in un intorno di un punto $a \in \mathbf{C}$ e sia

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z-a)^k$$

il suo sviluppo in serie in a. Supponiamo che f non sia identicamente nulla in un intorno di a. In tal caso i coefficienti a_k non sono tutti nulli.

L'ordine di f in a è definito come il più piccolo esponente k tale che $a_k \neq 0$, e si denota $o_a(f)$.

E' evidente che $o_a(f)$ coincide con l'ordine della serie $\sum_{k \geq 0} a_k T^k$ secondo la definizione data nel §1.

(5.3) LEMMA *Sia f una funzione analitica non costante in un intorno aperto A di $a \in \mathbf{C}$. Allora:*
(i) $o_a(f) > 0$ se e solo se $f(a) = 0$.
(ii) Esiste un aperto $U(a) \subset A$ contenente a tale che $o_z(f) = 0$ per ogni $z \in U(a)$, $z \neq a$.
(iii) Posto $f3 = \frac{df}{dz}$ si ha:

$$o_a(f') = o_a(f - f(a)) - 1$$

(iv) Se g è una funzione olomorfa e non costante su un aperto B di $\mathbf{C}$ tale che $g(B) \subset A$, e se per qualche $b \in B$ si ha $g(b) = a$, $g'(b) \neq 0$, allora:

$$o_b(f \circ g) = o_a(f)$$

Dimostrazione

(i) è ovvia.

(ii) Se $o_a(f) = 0$ la conclusione è ovvia per la continuità di f. Supponiamo che a sia uno zero di f, cioè che si abbia $a_0 = f(a) = 0$, e che f non sia identicamente nulla in un intorno di a; sia $h = o_a(f) > 0$. Allora possiamo scrivere:

$$f(z) = \sum_{k \geq h} a_k (z-a)^k = (z-a)^h \sum_{k \geq h} a_k (z-a)^{k-h}$$

La serie $\sum_{k \geq h} a_k (z-a)^{k-h}$ converge in un intorno di a ad una funzione analitica $g(z)$. Poiché $g(a) = a_h \neq 0$, esiste $r > 0$ tale che $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in D_r(a)$. Ma allora $f(z) = (z-a)g(z) \neq 0$ per ogni $z \in D_r(a)$, $z \neq a$. Quindi il punto a è isolato nell'insieme degli zeri di f.

(iii) è immediata.

(iv) Se $o_a(f) = 0$ la conclusione è ovvia. Supponiamo $o_a(f) > 0$ e procediamo per induzione su $o_a(f)$. Per la b) si ha:

$$o_b(f \circ g) = 1 + o_b((f \circ g)') = 1 + o_b[f'(g(w))g'(w)] =$$

$$= 1 + o_b(f' \circ g) + o_b(g') = 1 + o_b(f' \circ g)$$

Poiché dalla b) segue che $o_a(f') = o_a(f) - 1$, per l'ipotesi induttiva si ha $o_b(f' \circ g) = o_a(f')$ e quindi:

$$o_b(f \circ g) = 1 + o_a(f') = o_a(f)$$

q.e.d.

Applicando il teorema (5.1) deduciamo il seguente risultato:

(5.4) TEOREMA (Principio d'identità delle funzioni analitiche) *Se $U \subset \mathbf{C}$ è un aperto connesso ed $f \in H(U)$ non è identicamente nulla, l'insieme degli zeri di f è un insieme discreto, cioè tutti i suoi punti sono isolati.*

Abbiamo il seguente immediato

(5.5) COROLLARIO *Se $U \subset \mathbf{C}$ è un aperto connesso ed $f, g \in H(U)$, allora l'insieme*

$$S = \{z \in U : f(z) = g(z)\}$$

è discreto oppure $S = U$. In particolare, se $f \in H(U)$ e $c \in \mathbf{C}$, allora

$$f^{-1}(c) = \{z \in U : f(z) = c\}$$

se non è vuoto, è un insieme discreto oppure $f^{-1}(c) = U$, cioè f è costante.

(5.5) DEFINIZIONE *Sia $f : A \to \mathbf{C}$ una funzione analitica definita su un aperto A di $\mathbf{C}$ e sia $a \in A$.* L'indice di ramificazione *di f in a è*

$$e_f(a) = o_a(f(z) - f(a))$$

Il punto a si dice di ramificazione *per f se $e_f(a) \geq 2$. In tal caso diremo che f* ramifica *in a.*

Dal Lemma (5.3) segue che si ha

$$e_f(a) = o_a(f') + 1$$

e che l'insieme dei punti di ramificazione di f è un sottoinsieme discreto di A.

ESEMPIO. Per un fissato intero $n \geq 2$ ed una costante $c \in \mathbf{C}$ la funzione $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, definita da $f(z) = z^n + c$, ramifica solo nel punto $z = 0$ con indice di ramificazione n. Se invece $n = 1$ la f non ramifica in alcun punto.

Il Lemma seguente generalizza (5.3)(iv):

(5.6) LEMMA *Sia f una funzione analitica non costante in un intorno aperto A di $a \in \mathbf{C}$. Se g è una funzione olomorfa e non costante su un aperto B di $\mathbf{C}$ tale che $g(B) \subset A$, e se per qualche $b \in B$ si ha $g(b) = a$ allora:*

$$e_{f \circ g}(b) = e_f(a) e_g(b)$$

Dimostrazione
Si ha

$$e_{f \circ g}(b) = 1 + o_b((f \circ g)') = 1 + o_b[(f' \circ g)g'] = 1 + o_b(f' \circ g) + o_b(g') = o_b(f' \circ g) + e_g(b)$$

Se $e_f(a) = 1$ allora $o_a(f') = 0$ e quindi si ha anche $o_b(f' \circ g) = 0$. Dall'uguaglianza precedente segue che $e_{f \circ g}(b) = e_g(b)$ ela conclusione è vera in questo caso. Supponiamo $e_f(a) \geq 2$ e procediamo per induzione su $e_f(a)$. Per l'ipotesi induttiva si ha:

$$o_b(f' \circ g) = e_{f' \circ g}(b) = e_{f'}(a) e_g(b) = [e_f(a) - 1] e_g(b)$$

e quindi:

$$e_{f \circ g}(b) = o_b(f' \circ g) + e_g(b) = [e_f(a) - 1] e_g(b) + e_g(b) = e_f(a) e_g(b)$$

q.e.d.

Si osservi che nel caso in cui $a = 0 = f(a)$ il Lemma afferma che

$$o_b(f \circ g) = o_0(f) o_b(g)$$

oooooooooo

d. *La serie binomiale*

Sia $\alpha \neq 0$ un numero complesso. Definiamo i *coefficienti binomiali* come:

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!}$$

per $k \geq 1$, e $\binom{\alpha}{0} = 1$. Definiamo la *serie binomiale* nel modo seguente:

$$B_\alpha(t) = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} t^k$$

(5.6) LEMMA *Se α non è uguale ad un intero ≥ 0, il raggio di convergenza di $B_\alpha(t)$ è uguale ad 1.*

Dimostrazione
L'ipotesi su α implica che nessuno dei coefficienti $\binom{\alpha}{k}$ è zero. Si ha:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|1 - \frac{\alpha + 1}{k + 1}\right|$$

che converge ad 1 per $k \to \infty$. La conclusione segue dal criterio del rapporto. *q.e.d.*

Se m è un intero positivo segue dal lemma che la serie $B_{\frac{1}{m}}(x)$ converge assolutamente per x reale tale che $|x| < 1$. D'altra parte è ben noto dai corsi di analisi matematica che la somma di tale serie soddisfa $B_{\frac{1}{m}}(x)^m = 1 + x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ tale che $|x| < 1$. Dal principio di identità delle funzioni olomorfe discende quindi che nel disco aperto $D_1(0) \subset \mathbf{C}$ la funzione somma della serie $B_{\frac{1}{m}}(z)$ soddisfa

$$B_{\frac{1}{m}}(z)^m = 1 + z$$

.

6. SINGOLARITA' DELLE FUNZIONI ANALITICHE

(6.1) DEFINIZIONE *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto. Se $a \in U$ ed $f \in H(U)\backslash\{a\}$ diremo che f ha una* singolarità isolata *nel punto a. Se f può essere estesa ad una funzione analitica in tutto U, diremo che a è una* singolarità eliminabile *per f, ovvero che f ha una singolarità eliminabile in a.*

Nella dimostrazione del teorema seguente utilizzeremo l'implicazione (che non abbiamo dimostrato) "f olomorfa $\Rightarrow$ f analitica".

(6.2) TEOREMA *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto, $a \in U$, e sia $f \in H(U)\backslash\{a\}$. Se f è limitata in $D_r(a)\backslash\{a\}$ per qualche $r > 0$, allora f ha una singolarità eliminabile in a.*

Dimostrazione
Definiamo $h : U \to \mathbf{C}$ ponendo

$$\begin{array}{rcl} h(a) = & 0 & \\ h(z) = & (z-a)^2 f(z), & \qquad z \neq a \end{array}$$

Si ha:

$$\lim_{z\to a} \frac{h(z)-h(a)}{z-a} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$$

perché f è limitata in un intorno di a. Pertanto h è olomorfa in tutto U, e quindi h è analitica in U. Poiché $h(a) = 0 = h'(a)$ si ha:

$$h(z) = \sum_{k\geq 2} c_k (z-a)^k$$

in un intorno di a. Ponendo $f(a) = c_2$ definiamo un'estensione di f a tutto U che è analitica perché in un intorno di a si ha:

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} c_{k+2}(z-a)^k$$

q.e.d.

Le singolarità non eliminabili delle funzioni analitiche si classificano in *polari* e *essenziali* e possono essere caratterizzate dal comportamento della funzione in un loro intorno. Per i nostri scopi saraà sufficiente adottare la seguente definizione:

(6.3) DEFINIZIONE *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto. Se $a \in U$ ed $f \in H(U)\backslash\{a\}$ diremo che f ha una* singolarità polare *(o un* polo*) nel punto a se la funzione $1/f$ ha una singolarità eliminabile in a ed $1/f(a) = 0$, cioè $o_a(1/f) > 0$. Se a non è né una singolarità eliminabile né un polo diremo che f ha una singolarià essenziale in a.*

Se f ha un polo in a ed $o_a(1/f) = m$ diremo che f ha ordine $-m$ in a ovvero che a è un polo di ordine m. Quindi l'ordine di f in un polo è negativo, mentre l'ordine del polo è positivo. Questa terminologia può generare confusione ma è quella comunemente usata.
Ad esempio la funzione $\frac{1}{z}$ ha un polo di ordine 1 in 0, cioè ha ordine -1 in 0. Un esempio di singolarità essenziale è il punto 0 per la funzione $e^{\frac{1}{z}}$.

(6.4) DEFINIZIONE *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto, $S \subset U$ un sottoinsieme discreto. Una funzione $f \in H(U\backslash S)$ si dice* meromorfa *in U se in ogni punto di S la funzione ha una singolarità eliminabile oppure un polo. L'insieme di tutte le funzioni meromorfe in U si denota $M(U)$.*

Ovviamente si ha

$$H(U) \subset M(U)$$

Inoltre segue subito dalla definizione che se $f, g \in M(U)$ allora $f \pm g \in M(U)$ e $fg \in M(U)$. Inoltre se $f \in M(U)$ non è identicamente nulla allora $1/f \in M(U)$. Pertanto $M(U)$ è un campo con le operazioni di somma e di prodotto di funzioni.

7. PROPRIETA' GEOMETRICHE DELLE FUNZIONI ANALITICHE

Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto, e $f \in H(U)$. Diremo f un *isomorfismo analitico* se la sua immagine $V = f(U)$ è un aperto di $\mathbf{C}$ ed esiste una funzione analitica $g : V \to U$ tale che $f \circ g = 1_V$ e $g \circ f = 1_U$, cioè tale che f e g siano funzioni inverse una dell'altra.

Diremo che $f \in H(U)$ è un *isomorfismo analitico locale in un punto* $z_0 \in U$ se esiste un intorno aperto $U_0 \subset U$ di z_0 tale che la restrizione di f ad U_0 sia un isomorfismo analitico. Diremo f un *isomorfismo analitico locale* se è un isomorfismo analitico locale in ogni punto $z \in U$.

Ovviamente ogni isomorfismo analitico è anche un isomorfismo analitico locale. Dalle definizioni segue inoltre che un isomorfismo analitico locale è un'applicazione aperta.

Dimostriamo un importante risultato preliminare su cui baseremo le nostre considerazioni successive.

(7.1) PROPOSIZIONE *Sia $f(z)$ una serie di potenze tale che $o(f) = 1$. Allora esiste un'unica serie di potenze $g(z)$ tale che $o(g) = 1$ e $f(g(z)) = z$, e la serie $g(z)$ soddisfa anche l'identità $g(f(z)) = z$. Se f è convergente allora anche g è convergente. La serie $g(z)$ si dice* inversa formale *di f.*

Dimostrazione

Per ipotesi possiamo supporre che la serie f sia della forma:

$$f(z) = a_1 z - \sum_{k \geq 2} a_k z^k$$

con $a_1 \neq 0$. Dobbiamo trovare una serie di potenze $g(z) = \sum_{k \geq 1} b_k z^k$ tale che $b_1 \neq 0$ e

$$a_1 g(z) - a_2 g(z)^2 - a_3 g(z)^3 - \cdots = z$$

Qust'uguaglianza corrisponde ad infinite equazioni nei coefficienti incogniti $b_1, b_2, \dots$ ottenute eguagliando tra loro i coefficienti delle serie a primo e secondo membro. Queste equazioni sono della forma:

$$a_1 b_1 = 1$$

$$a_1 b_k - P_k(a_2, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{k-1}) = 0 \qquad k \geq 2$$

dove P_k è un polinomio a coefficienti interi positivi. Poiché $a_1 \neq 0$ se ne deduce immediatamente che queste equazioni possono essere risolte induttivamente, individuando univocamente i coefficienti b_k. Quindi la serie $g(z)$ esiste ed è unica.

Dimostriamo che $g(f(z)) = z$. Applicando la stessa dimostrazione a g deduciamo che esiste una serie di potenze $h(z)$ tale che $o(h) = 1$ e $g(h(z)) = z$. Ma allora si ha:

$$g(f(z)) = g(f(g(h(z)))) = g(h(z)) = z$$

come si voleva.

Supponiamo ora che f sia convergente. Salvo moltiplicare f per a_1^{-1} se necessario, possiamo supporre che $a_1 = 1$. Quest'ipotesi non è restrittiva, perché, dimostrata la convergenza della serie g costruita per $a_1^{-1}f$, seguirà immediatamente quella della serie costruita per f.

Sia

$$f^*(z) = z - \sum_{k \geq 2} a_k^* z^k$$

una serie di potenze con a_k^* reale ≥ 0 e tale che $|a_k| \leq a_k^*$ per ogni k. Sia $\varphi(z) = \sum_{k \geq 1} c_k z^k$ l'inversa formale di $f^*(z)$.

Si ha $c_1 = 1$ e

$$c_k - P_k(a_2^*, \ldots, a_k^*, c_1, \ldots, c_{k-1}) = 0$$

con gli stessi polinomi P_k di prima. Per induzione segue allora che ogni c_k è reale ≥ 0, e che

$$|b_k| \leq c_k$$

Per concludere sarà quindi sufficiente scegliere la serie f^* in modo che $\varphi(z)$ abbia raggio di convergenza positivo. Poiché esiste $A > 0$ tale che

$$|a_k| \leq A^k$$

per ogni $k \geq 2$, poniamo:

$$f^*(z) = z - \sum_{k \geq 2} A^k z^k = z - \frac{A^2 z^2}{1 - Az}$$

La serie $\varphi(z)$ soddisfa $f^*(\varphi(z)) = z$, cioè:

$$\varphi(z) - \frac{A^2 \varphi(z)^2}{1 - A\varphi(z)} = z$$

che è equivalente all'equazione quadratica:

$$(A^2 + A)\varphi(z)^2 - (1 + Az)\varphi(z) + z = 0$$

Quest'equazione ha la soluzione:

$$\varphi(z) = \frac{(1 + Az) - \sqrt{(1 + Az)^2 - 4z(A^2 + A)}}{2(A^2 + A)}$$

L'espressione sotto radice è della forma:

$$(1 + Az)^2 \left(1 - \frac{4z(A^2 + A)}{(1 + Az)^2}\right)$$

e la sua radice quadrata è data da:

$$(1 + Az) \left(1 - \frac{4z(A^2 + A)}{(1 + Az)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

La funzione $1 - \frac{4z(A^2+A)}{(1+Az)^2}$ è somma di una serie di potenze della forma $1+h(z)$ con $o(h) \geq 1$. Sostituendo nella serie binomiale $B_{\frac{1}{2}}(z)$ otteniamo una serie $B_{\frac{1}{2}}(h(z))$ convergente ad $(1+h(z))^{\frac{1}{2}}$. Quindi $\varphi(z)$ è esprimibile come composizione di serie convergenti, ed è pertanto convergente. Ciò dimostra che anche la serie $g(z)$ è convergente. *q.e.d.*

ESERCIZIO: Verificare che l'inversa formale di $e^z - 1$ è la serie

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{w^k}{k}$$

la quale ha raggio di convergenza 1. Notare che invece $e^z - 1$ ha raggio di convergenza ∞.

(7.2) COROLLARIO *Sia f una funzione analitica in un aperto $U \subset \mathbf{C}$ e sia $z_0 \in U$ tale che $f'(z_0) \neq 0$. Allora f è un isomorfismo analitico locale in z_0.*

Dimostrazione

Supponiamo dapprima che $z_0 = 0$ e $f(0) = 0$. Quindi f è analitica in un intorno di 0, e ciò significa che f può essere rappresentata come somma di una serie di potenze convergenti in 0, e quindi possiamo pensare f come definita nel suo disco aperto di convergenza $f : D \to \mathbf{C}$. Sia g l'inversa formale di f e sia V_0 un disco aperto centrato in 0 e contenuto nel disco di convergenza di g e tale che $g(V_0) \subset D$; V_0 esiste perché g è continua. Sia $U_0 = f^{-1}(V_0)$, e sia

$$f_0 : U_0 \to V_0$$

la restrizione di f a U_0. Si osservi che $g(V_0) \subset U_0$ perché per ogni $w \in V_0$ si ha $f(g(w)) = w$. Pertanto la restrizione g_0 di g a V_0 definisce un'applicazione analitica $g_0 : V_0 \to U_0$ tale che $f_0(g_0(w)) = w$ per ogni $w \in V_0$. D'altra parte per come è stata definita f_0 si ha anche $g_0(f_0(z)) = z$ per ogni $z \in U_0$, e quindi f_0 e g_0 sono isomorfismi analitici inversi uno dell'altro; ciò conclude la dimostrazione nel caso $z_0 = 0$ e $f(z_0) = 0$.

Il caso generale si riduce a quello precedente per traslazione. Precisamente, per una f arbitraria tale che $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$, si ponga $w = z - z_0$, e

$$F(w) = f(w + z_0) - f(z_0) = \sum_{k \geq 1} a_k w^k$$

Pertanto:

$$f(z) = F(z - z_0) + f(z_0)$$

Allora per quanto dimostrato nella prima parte F possiede un'inversa locale G. Poniamo $w_0 = f(z_0)$, e sia

$$g(w) = G(w - w_0) + z_0$$

Allora g è un'inversa locale per f. Infatti:

$$f(g(w)) = F(g(w) - z_0) + f(z_0) = F(G(w - w_0) + z_0 - z_0) + f(z_0) =$$

$$= w - w_0 + f(z_0) = w$$

e viceversa:

$$g(f(z)) = G(f(z) - w_0) + z_0 = G(F(z - z_0) + f(z_0) - w_0) + z_0 = z - z_0 + z_0 = z$$

e ciò conclude la dimostrazione. *q.e.d.*

Dal corollario (7.2) segue ad esempio che la funzione esponenziale è un isomorfismo analitico locale, essendo $(e^z)' = e^z \neq 0$ per ogni $z \in \mathbf{C}$. Pertanto ogni $w_0 \neq 0$ possiede un intorno aperto su cui è definita una determinazione analitica di $\log(w)$ avente come valore in w_0 una qualsiasi preassegnata determinazione di $\log(w_0)$.

Ciò implica facilmente che $e^{(\cdot)} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$ è un rivestimento, ed è il rivestimento universale di $\mathbf{C}^*$.

Il risultato che segue descrive una proprietà geometrica fondamentale delle funzioni analitiche.

(7.3) TEOREMA (dell'applicazione aperta) *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso e $f : U \to \mathbf{C}$ una funzione analitica. Se f non è costante allora f è un'applicazione aperta.*

Dimostrazione

Poiché f non è costante la sua derivata $f'(z)$ si annulla al più su un sottoinsieme discreto $S \subset U$. Per il corollario (7.2), la restrizione di f ad $U \backslash S$ è un isomorfismo analitico locale e quindi è aperta. Ci resta da verificare che f è aperta anche nei punti di S.

Sia $a \in S$; non è restrittivo supporre che $f(a) = 0$. Allora $r := o_a(f) \geq 2$. Si ha $f(z) = \sum_{k \geq r} a_k (z-a)^k$, $a_r \neq 0$, e $f(z) = (z-a)^r g(z)$ in un opportuno intorno $V \subset U$ di a, dove $g(z) = \sum_{k \geq 0} a_{k+r}(z-a)^k$, e $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in V$.

Poiché $g(a) = a_r \neq 0$ la funzione $g(z)$ manda un intorno W di a in un disco D di centro a_r su cui è ben definita una determinazione analitica del logaritmo complesso (perché, come abbiamo osservato in precedenza, la funzione esponenziale è un isomorfismo analitico locale). Pertanto è ben definita ed analitica in W la funzione

$$h(z) = \exp\left(\frac{1}{r}\log(g(z))\right)$$

dove abbiamo posto $\exp(-) = e^{(-)}$. Per come è stata definita la funzione h, si ha $g(z) = h(z)^r$ e quindi

$$f(z) = ((z-a)\ h(z))^r \qquad [7.1]$$

per ogni $z \in W$. Dalla [7.1] segue che la funzione $f(z)$ è la composizione della funzione

$$z \mapsto (z-a)\ h(z)$$

con la funzione

$$w \mapsto w^r$$

Si osservi che $h(a) \neq 0$ e quindi $o_a[(z-a)h(z)] = 1$. Pertanto la funzione $(z-a)h(z)$ è un isomorfismo analitico locale in a, in particolare è aperta in un intorno di a. Inoltre è elementare verificare che la funzione $w \mapsto w^r$ è aperta. In conclusione $f(z)$ è aperta in un intorno di a. *q.e.d.*

(7.4) OSSERVAZIONE: Dalla dimostrazione del teorema (7.3) segue che nell'intorno di un punto $a \in U$ in cui $f'(a) = 0$ l'applicazione f è la composizione di un isomorfismo analitico locale con l'applicazione $w \mapsto w^r$, dove $r = o_a(f - f(a))$.