Cap. 2. Superfici topologiche e differenziabili

1. DEFINIZIONI

Una *superficie topologica* è uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile S tale che per ogni punto $p \in S$ esista un aperto U contenente p ed un omeomorfismo $\phi_U : U \to A$ dove A è un aperto di $\mathbf{R}^2$. La coppia (U, ϕ_U) si dice una *carta locale* per S. Quindi se S è una superficie esiste una famiglia di carte locali $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ tale che $\{U_i\}_{i \in I}$ sia un ricoprimento aperto di S. Una tale famiglia si dice un *atlante* per S.

La nozione di superficie topologica è un caso particolare ($n = 2$) di quella di *varietà topologica di dimensione* n (cfr. [S2], pag. 99).

Due carte locali (U, ϕ_U) e (V, ϕ_V) per S si dicono *differenziabilmente compatibili* se $U \cap V = \emptyset$ oppure $U \cap V \neq \emptyset$ e l'applicazione

$$\phi_V \circ \phi_U^{-1} : \phi_U(U \cap V) \to \mathbf{R}^2$$

è differenziabile di classe C^∞, cioè possiede derivate parziali continue di ogni ordine.

Un atlante $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ per S si dice un *atlante differenziabile* se per ogni $i, j \in I$ le carte locali (U_i, ϕ_i) e (U_j, ϕ_j) sono differenziabilmente compatibili.

Due atlanti differenziabili si dicono *equivalenti* se la loro unione è un atlante differenziabile.

Se sulla superficie topologica S è assegnato un atlante differenziabile, si dice che su S è definita una *struttura di superficie differenziabile*, ed in tal caso diremo che S è una *superficie differenziabile.* Per definizione due atlanti differenziabili equivalenti definiscono la stessa struttura di superficie differenziabile.

Anche la nozione di superficie differenziabile è un caso particolare di quella di *varietà differenziabile di dimensione* n, per la quale rinviamo a [S2], cap. 5.

Sono esempi di superfici differenziabili $\mathbf{R}^2$, S^2, $S^1 \times S^1$, $\mathbf{P}^2$ (cfr. [S2]). Ogni aperto di una superficie differenziabile è una superficie differenziabile.

Se S è una superficie differenziabile, $U \subset S$ è un aperto, ed $f : U \to \mathbf{R}$ è una *funzione*, diremo che f è *differenziabile* se per ogni $i \in I$ tale che $U \cap U_i \neq \emptyset$ la funzione $f \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U \cap U_i) \to \mathbf{R}$ è differenziabile.

Un'*applicazione continua* $F : S \to S'$ tra due superfici differenziabili si dice *differenziabile* se per ogni carta locale (U, ϕ_U) per S e ogni carta locale $(U', \phi_{U'})$ per S', l'applicazione $\phi_{U'} \circ F \circ \phi_U^{-1}$ è differenziabile nell'aperto in cui è definita.

Se un'applicazione differenziabile $F : S \to S'$ è un omeomorfismo il cui inverso $G : S' \to S$ è differenziabile, allora F si dice un *diffeomorfismo*. Se un diffeomorfismo F esiste, S ed S' si dicono *diffeomorfe*.

2. ORIENTABILITÀ

Sia S una superficie differenziabile, $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ un atlante differenziabile per S.

Supponiamo $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. All'applicazione differenziabile $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \mathbf{R}^2$ è associata una matrice jacobiana

$$J(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_j^1}{\partial x_i^1} & \frac{\partial x_j^1}{\partial x_i^2} \\ \frac{\partial x_j^2}{\partial x_i^1} & \frac{\partial x_j^2}{\partial x_i^2} \end{pmatrix}$$

i cui elementi sono le seguenti funzioni differenziabili su $\phi_i(U_i \cap U_j)$:

$$\frac{\partial x_j^\alpha}{\partial x_i^\beta} = \frac{\partial(\phi_j \circ \phi_i^{-1})_\alpha}{\partial x_\beta} \qquad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2$$

Per il teorema della funzione inversa di ha

$$\det[J(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(p)] \neq 0$$

per ogni $p \in \phi_i(U_i \cap U_j)$, perché $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ e $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sono applicazioni differenziabili una inversa dell'altra.

Diremo che le carte locali $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$ sono *concordemente orientate* se

$$\det[J(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(p)] > 0$$

per ogni $p \in \phi_i(U_i \cap U_j)$. Se questa condizione non è verificata le carte locali (U_i, ϕ_i), (U_j, ϕ_j) si diranno *discordemente orientate.*

Si osservi che, essendo $\det[J(\phi_j \circ \phi_i^{-1})]$ una funzione continua su $\phi_i(U_i \cap U_j)$, il suo valore si mantiene di segno costante su ogni componente connessa di $\phi_i(U_i \cap U_j)$.

Se (U_i, ϕ_i) e (U_j, ϕ_j) sono concordemente orientate per ogni $i, j \in I$ diremo $\mathcal{U}$ un *atlante orientato.* Se possiede un atlante orientato diremo S una *supericie orientabile.* Altrimenti S si dice *non orientabile.*

Due atlanti orientati si dicono *concordi* se la loro unione è un atlante orientato. L'essere concordi è una relazione di equivalenza tra atlanti orientati. Una classe di equivalenza di atlanti orientati si dice una *orientazione* di S. Assegnare una orientazione di S significa assegnare un atlante orientato. In tal caso diremo S *orientata.*

Ogni superficie differenziabile orientabile possiede esattamente due orientazioni (cfr. [S2], §23).

$\mathbf{R}^2$, S^2, $S^1 \times S^1$ sono superfici orientabili (cfr. [S2], §23).

Prima di dare esempi di superfici non orientabili, dimostriamo la seguente

PROPOSIZIONE *Sia S una superficie differenziabile orientabile, $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ un atlante differenziabile per S tale che U_i sia connesso per ogni $i \in I$. Se $\mathcal{U}$ non è orientato allora ad $\mathcal{U}$ è possibile associare un atlante orientato*

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{(U_i, \tilde{\phi}_i)\}_{i\in I}$$

le cui carte locali sono definite sugli stessi aperti e dove $\tilde{\phi}_i = (\phi_i^1, \phi_i^2)$ *oppure* $\tilde{\phi}_i = (\phi_i^2, \phi_i^1)$ *per ogni* $i \in I$.

Dimostrazione

Poiché S è orientabile esiste un atlante orientato $\mathcal{V} = \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.

Per ogni $i \in I$ consideriamo la carta locale (U_i, ϕ_i), e sia $x \in U_i$. Sia $\alpha \in A$ tale che $x \in V_\alpha$. Poniamo:

$$\tilde{\phi}_i = \begin{cases} (\phi_i^1, \phi_i^2) & \text{se } \det[J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x)) > 0 \\ (\phi_i^2, \phi_i^1) & \text{se } \det[J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x)) < 0 \end{cases}$$

Si osservi che la definizione di $\tilde{\phi}_i$ è indipendente dalla scelta di (V_α, ψ_α). Se infatti $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ allora, essendo

$$\psi_\beta \circ \phi_i^{-1} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha \circ \phi_i^{-1}$$

su $\phi_i(V_\alpha \cap V_\beta \cap U_i$, si ha:

$$\det[J(\psi_\beta \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x)) = \det[J(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x)) =$$

$$= \det[J(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})](\psi_\alpha(x)) \det[J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x))$$

donde si deduce che $\det[J(\psi_\beta \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x))$ e $\det[J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x))$ hanno lo stesso segno.

Inoltre, poiché U_i è connesso, il segno di $\det[J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x))$ è indipendente da $x \in U_i$. Quindi la definizione di $\tilde{\mathcal{U}}$ è ben posta, cioè dipende solo da $\mathcal{U}$ e da $\mathcal{V}$.

Verifichiamo che l'atlante $\tilde{\mathcal{U}}$ è orientato.

Sia $x \in U_i \cap U_j \cap V_alpha$. Allora si ha:

$$J(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(x)) = J(\phi_j \circ \psi_\alpha^{-1})(\psi_\alpha(x)) \ J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(x)) =$$

$$= [J(\psi_\alpha \circ \phi_j^{-1})(\psi_\alpha(x))]^{-1} \ J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(x))$$

e quindi:

$$\det[J(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(x))] = \det[J(\psi_\alpha \circ \phi_j^{-1})(\psi_\alpha(x))]^{-1} \det[J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(x))] > 0$$

q.e.d.

COROLLARIO *Se S possiede un atlante della forma $\mathcal{U} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$, dove gli aperti U e V sono connessi, $U \cap V$ è sconnesso, e $\det[J(\psi \circ \varphi)]$ di segni opposti in due componenti connesse di $U \cap V$, allora S non è orientabile.*

Dimostrazione

Poiché evidentemente non è possibile associare ad $\mathcal{U}$ un atlante orientato $\tilde{\mathcal{U}}$ come nella proposizione, segue che S non è orientabile. *q.e.d.*

ESEMPIO. *Il nastro di Möbius aperto M^o.*

È il quoziente di $\mathbf{I} \times (0,1)$ rispetto alla relazione di equivalenza μ che identifica $(0,t)$ con $(1,1-t)$ per ogni $t \in (0,1)$. Denotiamo con $\pi : \mathbf{I} \times (0,1) \to M^o$ la proiezione.

Dimostriamo che M^o è una superficie differenziabile non orientabile.

Un atlante differenziabile può essere così definito:

$$\mathcal{U} = \{(U,\varphi),(V,\psi)\}$$

dove

$$U = \pi[(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) \times (0,1)],\ \varphi = \pi^{-1}$$

$$V = \pi[([0,\frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3},1]) \times (0,1)],$$

$$\psi(\pi(x,y)) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } x < \frac{1}{3} \\ (x-1,1-y) & \text{se } x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

È evidente che $\mathcal{U}$ è un atlante differenziabile. Inoltre:

$$J(\psi \circ \varphi^{-1})(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{se } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{3} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{se } \frac{2}{3} < x < \frac{3}{4} \end{cases}$$

Quindi $\mathcal{U}$ è un atlante differenziabile non orientato. Dal corollario segue che M^o non è orientabile.

PROPOSIZIONE *Se S è una superficie differenziabile e orientabile, allora ogni aperto di S è una superficie differenziabile e orientabile. Equivalentemente, se una superficie differenziabile S possiede un aperto che è una superficie non orientabile, anche S non è orientabile.*

Dimostrazione
Ovvia

COROLLARIO *Se una superficie differenziabile S possiede un aperto diffeomorfo ad M^o, allora S non è orientabile.*

Dal teorema (3.1) discende che, per ogni superficie compatta e connessa S, è possibile definire la *caratteristica di Eulero-Poincaré* di S come

$$\chi(S) := \chi(S, \tau)$$

per una qualsiasi triangolazione τ di S.

PROPOSIZIONE *Sia S una superficie compatta e connessa ottenuta come quoziente di un poligono etichettato P_{2m} di $2m$ lati, tale che i $2m$ vertici di P_{2m} abbiano per immagini k punti distinti di S. Allora*

$$\chi(S) = 1 + k - m$$

Dimostrazione

L'asserto segue facilmente calcolando $\chi(S, \tau)$ per la triangolazione τ indotta su S dal ricoprimento mediante triangoli di P_{2m} illustrato dalla figura seguente.

COROLLARIO

$$\chi(S^2) = 2; \quad \chi(gT) = 2 - 2g; \quad \chi(g\mathbf{P}^2) = 2 - g$$

In particolare due multitori di generi diversi non sono omeomorfi, e due multipiani proiettivi di generi diversi non sono omeomorfi.

Dimostrazione
Immediata.

Non è difficile, anche se complicato, dimostrare che i multitori sono superfici orientabili. Poiché abbiamo visto che i multipiani proiettivi sono non orientabili, segue che le superfici che compaiono nell'enunciato del teorema di classificazione sono a due a due non omeomorfe.