Corso GE5 2002/2003 (E. Sernesi)
Secondo appello esame - 9/7/03

1. Classificare la superficie topologica ottenuta come quoziente del poligono etichettato corrispondente all'etichettatura:

$$a^{-1}d^{-1}cadbcb^{-1}$$

2. Si consideri la funzione:

$$f(z) = \frac{cos(z^2)}{cos(z)^2}$$

a) Determinare il più grande aperto U di $\mathbf{C}$ in cui f è analitica.
b) Per ogni $z_0 \in \mathbf{C} \backslash U$ classificare il comportamento di $f(z)$ in z_0.
c) Descrivere gli zeri di f ed i rispettivi ordini.
d) Dire se f è in 0 un isomorfismo analitico locale motivando la risposta.

3. Sia $f \in M(\mathbf{P}^1)$ la funzione meromorfa determinata dalla funzione razionale

$$\frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 2z - 1}$$

Determinare $R(f)$ e verificare la formula di Hurwitz.

4. Calcolare lo sviluppo in serie in 0 della funzione

$$\frac{1}{1-z} + e^{-z}$$

ed il suo raggio di convergenza.

5. Enunciare e dimostrare il principio di identità delle funzioni analitiche. Spiegare come si applica tale principio all'insieme di ramificazione di una funzione analitica.

Soluzioni

1) $4\mathbf{P}^2$

2)

a) $U = \mathbf{C} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

b) f ha un polo di ordine 2 in ogni $z_0 \in \mathbf{C} \backslash U$

c) zeri di ordine 1 in $z = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.

d) No perché $f'(0) = 0$.

3) $R(f) = \{1, \infty\}$ con indici di ramificazione 2.

4) $\sum_{k \geq 0} (1 + \frac{(-1)^k}{k!}) z^k, \quad r = 1.$