SUPERFICI DI RIEMANN

G.F.B. Riemann (1826-1866) introdusse le superfici che portano il suo nome (s. di R. d'ora in poi) nella sua tesi di laurea del 1851. È difficile esagerare l'importanza del concetto di s. di R., che si trova ancora oggi al centro di settori assai vitali e centrali della matematica quali la topologia algebrica, la geometria algebrica, la teoria dei gruppi discreti, le equazioni alle derivate parziali, la teoria dei numeri; importanti relazioni esistono tra la moderna fisica teorica e la teoria delle s. di R..

Le s. di R. furono introdotte allo scopo di fornire una chiave di lettura geometrica della teoria delle funzioni abeliane e degli integrali ellittici e iperellittici. Esse fornivano un quadro concettuale in grado di interpretare in modo nuovo e più chiaro fenomeni sui quali il progresso sembrava ormai dipendere più da calcoli che da idee, tanto erano divenuti complicati.

Le idee profondamente innovative di Riemann incontrarono grandi difficoltà ad essere accolte dai suoi contemporanei. Lo stile dei suoi scritti, informale ed intuitivo, era in contrasto con gli standard di rigore del tempo e ne rendeva più difficile la comprensione. Inoltre Riemann utilizzava come strumento analitico il "principio di Dirichlet", sulla cui validità a quel tempo si nutrivano ancora forti dubbi a causa di un controesempio ad un suo caso particolare trovato da K. Weierstrass. Riemann incontrò però alcuni convinti estimatori, tra cui il matematico italiano E. Betti, che ne tradusse la tesi in italiano. Negli anni '60 A. Clebsch reinterpretò con metodi puramente algebrico-geometrici alcuni dei concetti introdotti da Riemann ed in particolare riuscì a dare una definizione di *genere* di una curva piana che coincide con quello definito nell'ambito della teoria delle s. di R.. L'opera di Clebsch, morto prematuramente, fu proseguita dal suo allievo M. Nöther e da A. Brill i quali, in una memoria del 1873, dettero forma compiuta a tutte le conoscenze fino ad allora ottenute con l'indirizzo algebrico-geometrico.

Le idee analitiche di Riemann cominciarono gradualmente ad affermarsi verso la fine del secolo. Nel 1882 F. Klein pubblicò un breve e singolare saggio, scritto in uno stile euristico e poco rigoroso, in cui introdusse per la prima volta le s. di R. come varietà astratte anziché come rivestimenti del piano complesso associati ad una funzione algebrica, come Riemann aveva fatto (sembra però probabile che Riemann già conoscesse la definizione astratta). Il principio di Dirichlet fu stabilito rigorosamente negli anni successivi, grazie agli sforzi di diversi matematici tra cui D. Hilbert che nel 1901 lo dimostrò nella forma utilizzata da Riemann nei suoi scritti: essi ebbero così finalmente riconosciuta definitivamente la loro validità. Un altro importante passo avanti nella teoria delle s. di R. fu innescato dalle ricerche di Fricke-Klein e di Poincaré sulle funzioni automorfe. Esse condussero Poincaré a dimostrare nel 1907, contemporaneamente ed indipendentemente da P. Koebe, la possibilità di uniformizzare le s. di R.. Questi risultati, sui quali Riemann non aveva dato alcuna indicazione, costituivano la sintesi naturale tra le sue concezioni e quelle di Weierstrass sulle funzioni analitiche: infatti con l'uniformizzazione si ottiene una descrizione globale (punto di vista di Riemann) per mezzo di un parametro variabile in un dominio del piano complesso (punto di vista di Weierstrass). Questa sintesi rappresenta il culmine della teoria classica delle s. di R., ed è riassunta ed esposta in modo magistrale nel classico libro di H. Weyl: *Die Idee der Riemannschen Flache*, che ha esercitato una profonda influenza sulla matematica del XX secolo, pubblicato per la prima volta nel 1913 e poi più volte rimaneggiato dall'autore. In esso vengono trattati in maniera moderna le questioni topologiche quali la triangolabilità e l'orientazione, il gruppo fondamentale, il rivestimento universale, il principio di Dirichlet, il teorema di Riemann-Roch ed il teorema di uniformizzazione.

Con il libro di Weyl si aprì una fase nuova. Diverse discipline influenzate dalla teoria dell s. di R. iniziarono a svilupparsi autonomamente, come ad esempio la topologia algebrica, dopo le ricerche di Betti e quelle di Poincaré e di L.E.J. Brouwer dei primi anni del secolo. La geometria algebrica nel suo indirizzo trascendente, dopo gli inizi pioneristici dovuti a E. Picard, si rivolse allo studio delle varietà di dimensione superiore realizzando numerosi importanti risultati ad opera della scuola italiana (G. Castelnuovo, M. de Franchis, F. Enriques, F. Severi, ed altri) e con le ricerche di W.V.D. Hodge in Gran Bretagna.

La vera e propria teoria delle s. di R., acquisita la sua parte fondazionale, si rivolse a problemi molto più difficili di quelli appena lasciati alle spalle. Essi risalivano allo stesso Riemann il quale aveva affermato in modo alquanto oscuro che una s. di R. compatta di genere g dipende da $m(g) = 3g - 3 + \rho$ ($\rho = 3$ se $g = 0$, $\rho = 1$ se $g = 1$ e $\rho = 0$ se $g \geq 2$) parametri complessi, che lui chiamò *moduli*. Questo enunciato va interpretato come l'asserzione che l'insieme M_g delle classi di equivalenza conforme di s. di R. compatte di genere g ha una struttura di varietà complessa di dimensione $m(g)$; ma prima che se ne riuscisse a dare una dimostrazione rigorosa dovettero passare più di 100 anni. Si verificò però un fatto curioso ed in un certo senso opposto a ciò che era avvenuto per i primi risultati di Riemann: La dimostrazione dell'esistenza della varietà M_g non era nota, ma essa si dava per scontata e se ne studiavano le proprietà. M_g aveva anche un nome: venne chiamata *varietà dei moduli* delle s. di R. di genere g, in onore della terminologia introdotta da Riemann. Ad esempio A. Hurwitz aveva dimostrato già nel 1891 la connessione di M_g attraverso la rappresentazione di tutte le s. di R. come rivestimenti ramificati della sfera di Riemann. Severi nel 1915 dimostrò in modo molto semplice che M_g possiede la proprietà di essere unirazionale se $g \leq 10$: ciò significa essenzialmente che M_g può essere parametrizzata algebricamente con i punti di un aperto di uno spazio affine (una sorta di uniformizzabilità algebrica). Tale risultato fu esteso a $g \leq 13$ all'inizio degli anni '80 (Sernesi, M.C. Chang e Z. Ran) e per $g = 14$ da A. Verra (2004) mentre J. Harris e D. Mumford dimostrarono che è falso se $g \geq 23$ dispari, e poi successivamente D. Eisenbud e J. Harris lo dimostrarono anche per $g \geq 24$ pari.

Nel periodo a cavallo tra i due secoli in Germania i cultori delle funzioni theta, tra cui F. Prym, F. Schottky, H. Jung e W. Wirtinger, considerarono, in uno spazio rappresentativo di certe matrici quadrate di ordine g oggi chiamato *semispazio superiore di Siegel* e denotato H_g, quelle ottenute a partire da s. di R. compatte di genere g e da certi dati su di esse, le cosiddette *matrici jacobiane*, cercando di caratterizzare il luogo da esse descritto in H_g, detto *luogo jacobiano*. Questa questione, oggi nota come *problema di Schottky*, si è rivelata assai feconda nel generare ricerche importanti e connessioni profonde con altre parti della matematica, e non è stata ancora completamente risolta nella forma proposta da Schottky stesso. Per il primo caso interessante, $g = 4$, Schottky propose una soluzione esplicita la cui validità è stata confermata solo nel 1981 ad opera di J. Igusa. In un importante lavoro del 1909 Schottky e Jung proposero un metodo induttivo per risolvere il problema di Schottky, che è stato perfezionato recentemente ad opera di diversi autori (A. Beauville, J.D. Fay, D. Mumford). Un interessante punto di vista fu introdotto in un lavoro di A. Andreotti e A. Mayer del 1967, in cui si caratterizza il luogo jacobiano "a meno di componenti irriducibili" attraverso le proprietà di una certa sottovarietà, il *divisore theta*, dell'iperspazio complesso a g dimensioni associata ad una data matrice in H_g.

Parallelamente a queste ricerche si sviluppò nello stesso periodo in Italia un forte interesse per lo studio delle *corrispondenze* sulle s. di R., soprattutto ad opera di Castelnuovo, de Franchis, C.

Rosati, G. Scorza, Severi, R. Torelli. Nell'ambito di queste ricerche Torelli dimostrò nel 1913 che una s. di R. è univocamente determinata dalla sua matrice jacobiana. Questo è il celeberrimo "teorema di Torelli", oggi più volte ridimostrato (ad esempio da Andreotti nel 1958) e sottoposto a vaste generalizzazioni a causa della sua importanza.

Le ricerche sulle corrispondenze portate avanti in chiave geometrica dalla scuola italiana furono successivamente applicate in un contesto completamente diverso, vale e dire a questioni di aritmetica. Nel 1948 A. Weil riuscì a dimostrare l'ipotesi di Riemann per i campi di funzioni algebriche di una variabile su un campo finito. Questo straordinario risultato, destinato ad avere un importante seguito nella dimostrazione delle "congetture di Weil" da parte di P. Deligne nel 1974, riguarda il comportamento della funzione zeta introdotta da E. Artin nel 1924, e fu ottenuto sviluppando la teoria delle curve su un campo finito in modo astratto ricalcando quella delle s. di R..

Torniamo al problema dei moduli per le s. di R.. Il modo corretto di affrontarlo emerse molto lentamente anche se la soluzione per $g = 1$ era sotto gli occhi di tutti da decenni. Infatti era ben noto che M_1 si può ottenere come quoziente del semipiano di Siegel H_1 rispetto all'azione del gruppo modulare ellittico $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$; questo quoziente si identifica a $\mathbf{C}$ e quindi $M_1 = \mathbf{C}$.

Nel 1926 Fricke e Klein trovarono una parametrizzazione non biunivoca di M_g, $g \geq 2$, con i punti di un dominio T_g di $\mathbf{R}^{6g-6}$; una descrizione di T_g fu data indipendentemente da W. Fenchel e J. Nielsen. Da essa si deduce che M_g si identifica al quoziente di T_g rispetto ad un gruppo discreto $\mathbf{h}_g$. Nel 1939 O. Teichmuller, a seguito di sue importanti ricerche sulle applicazioni quasi-conformi, dette una descrizione della geometria di T_g scoprendo un modo di parametrizzare deformazioni della struttura complessa di una superficie di Riemann per mezzo di differenziali quadratici. Il dominio T_g ed il gruppo $\mathbf{h}_g$ sono oggi chiamati rispettivamente *spazio di Teichmuller* e *gruppo modulare di Teichmuller*. Prima che si giungesse alla comprensione di T_g dal punto di vista complesso dovettero però trascorrere altri 20 anni. Verso la fine degli anni '50 L. Ahlfors e L. Bers indipendentemente scoprirono un modo di realizzare T_g come un aperto di $\mathbf{C}^{m(g)}$. Da questa descrizione segue immediatamente che il gruppo modulare di Teichmuller agisce su T_g come un gruppo di automorfismi analitici e quindi, per un risultato generale di H. Cartan, sul quoziente $T_g/\mathbf{h}_g$ viene indotta una struttura di spazio analitico che si identifica con M_g: la costruzione della varietà M_g viene così definitivamente acquisita.

Mentre gli specialisti dell'analisi complessa erano impegnati nella costruzione di M_g come abbiamo appena riferito, i geometri algebrici erano alla ricerca di una costruzione di M_g di natura puramente algebrica, utilizzando il fatto che M_g si identifica con l'insieme delle classi di isomorfismo di curve algebriche proiettive nonsingolari di genere g. Il problema si presentava come molto arduo soprattutto a causa dell'inadeguatezza del linguaggio della geometria algebrica classica. Tale linguaggio, sotto la spinta di questo e di altri problemi, subì una serie tumultuosa di successivi cambiamenti a partire dagli anni '40 ad opera soprattutto di O. Zariski, A. Weil, J.P. Serre, culminata nella teoria degli schemi creata da A. Grothendieck verso la fine degli anni '50. La costruzione di M_g come varietà algebrica quasi-proiettiva fu ottenuta per la prima volta da D. Mumford nel 1965 utilizzando una combinazione di idee classiche, risalenti a Hilbert, e di tecniche moderne. Anche in questo caso M_g venne costruito come quoziente di una varietà algebrica rispetto all'azione di un gruppo.

Per mancanza di spazio omettiamo di riferire sugli importanti ulteriori sviluppi della teoria delle s. di R. successivi al 1960.

BIBLIOGRAFIA

Farkas H.M., Kra I.: *Riemann Surfaces*, Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1980.

Mumford D.: *Curves and their Jacobians*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

Mumford D., Fogarty J.: *Geometric Invariant Theory*, second enlarged edition, Springer Verlag, 1982.

Riemann G.F.B.: *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, R. Dedekind e H. Weber (eds.), Teubner, Leipzig 1892 (Dover 1953).

Siegel C.L.: *Topics in Complex Function Theory*, 3 volumi, Wiley-Interscience, New York, 1969, 1971, 1973.

Springer G.: *Introduction to Riemann Surfaces*, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1957.

Weyl H.H.: *Die Idee der Riemannschen Flache*, Teubner Verlag, Leipzig 1913.

E. Sernesi