su f, nessuna sua polare passa per P (n. 12, III). In detta ipotesi, a norma del teorema di reciprocità (n. 12, IV), affinché la polare s-ma di P rispetto ad f passi per O, occorre e basta che la polare $(n-s)$-ma (o di ordine s) di O rispetto ad f passi per P. Quest'ultima polare deve quindi risultare indeterminata, se si vuole che la suddetta condizione valga per o g n i P di S_r; e ciò equivale a supporre $s < h$, d'onde $h \geq 2$. Pertanto:

Le polari di una forma f non hanno alcun punto in comune fuori degli eventuali punti multipli di f. E precisamente, il luogo dei punti comuni alle polari s-me consta dei punti di f di molteplicità superiore ad s.

Conservando le precedenti notazioni, supponiamo dunque $h > s$, e denotiamo con f' la polare s-ma di P rispetto ad f e con φ la polare $(n-h)$-ma di O rispetto ad f, ossia (n. 13) il cono (d'ordine h) tangente in O ad f. In forza del teorema di permutabilità (n. 12, II), la polare s-ma di P rispetto a φ coincide con la polare $(n-h)$-ma di O rispetto ad f'. Per un precedente risultato si ha pertanto che la prima — e quindi pure la seconda — di tali polari è un cono d'ordine $h-s$ e vertice O, salvo ch'essa sia indeterminata, il che accade se, e soltanto se, la retta OP appartiene al cono φ con molteplicità superiore all'ordine $h-s$ di tali polari. Basta allora applicare il primo teorema del presente numero alla forma f' ed alla suddetta polare $(n-h)$-ma di O rispetto ad essa, per concludere che:

La polare s-ma f' di un punto P rispetto ad una forma f passa per un punto h-plo O di f ($h > s$, $O \neq P$) con molteplicità superiore ad $h-s$, se, e soltanto se, la retta OP appartiene al cono φ tangente in O ad f con molteplicità superiore ad $h-s$. Altrimenti f' ha in O un punto di esatta molteplicità $h-s$, il cono tangente in O ad f' coincidendo allora con la polare s-ma della retta OP rispetto al cono φ.

15. **Coni, quadriche e monoidi.** — Una forma f di S_r, d'ordine $n \geq 2$ qualsiasi, può possedere più punti n-pli. In ogni caso, i punti n-pli di f sono precisamente i punti di S_r le cui coordinate annullano le singole derivate $(n-1)$-me di $f(x)$ (n. 13), il che fornisce per essi un sistema di equazioni lineari, a coefficienti funzioni lineari dei coefficienti di $f(x)$. Pertanto, il luogo dei punti n-pli di f risulta necessariamente uno s p a z i o l i n e a r e, S_k, che si determina razionalmente in funzione dei coefficienti di $f(x)$; si dice allora che f è un *cono, di vertice S_k*.

Se $k = r-1$, f riducesi all'*iperpiano $S_k = S_{r-1}$ contato n volte*; altrimenti f risulta *luogo di ∞^{r-k-2} S_{k+1}*, detti gli *spazi generatori* del cono, ottenibili p. es. come *proiezioni* da S_k dei singoli punti della V^n_{r-k-2} secondo cui f viene segata da un S_{r-k-1} di S_r sghembo con S_k. Tutto ciò si ha subito in base al n. 13, od anche osservando che, assunti S_k ed S_{r-k-1} come spazi $x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_r = 0$ e $x_0 = x_1 = \ldots = x_k = 0$, le equazioni di f e di V^n_{r-k-2} diventano rispettivamente del tipo

$$\varphi(x_{k+1}, \ldots, x_r) = 0, \quad x_0 = x_1 = \ldots = x_k = \varphi(x_{k+1}, \ldots, x_r) = 0,$$

ove φ denota una forma di grado n nelle $x_{k+1}, \ldots, x_r$.

Per una *quadrica* — ossia (n. 10) per una forma d'ordine $n = 2$ — di S_r, i soli punti multipli possono unicamente essere dei punti *doppi*; se ne ha, la quadrica risulta un *cono* avente come vertice lo spazio luogo dei punti doppi: allora si dice ch'essa (come luogo di punti) è *singolare*, o *degenere*, o *specializzata* $k+1$ *volte*, o che ha *indice di specializzazione* $k+1$, ove k designi la dimensione del vertice $(0 \leq k \leq r-1)$. Corrispondentemente, una quadrica che non sia un cono dicesi *non singolare*, o *non degenere*, o *non specializzata*, od anche si dice ch'essa ha *indice di specializzazione zero*. Se, in conformità con la (1_{11}), si rappresenta una quadrica f con l'equazione

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} a_{ij} x_i x_j = 0 \quad (a_{ij} = a_{ji}), \tag{1}$$

l'iperpiano u polare di un punto x rispetto ad essa — in forza delle (4_{13}) — ha le coordinate plückeriane

$$u_i = \sum_{j=0}^{r} a_{ij} x_j \quad (i = 0, 1, \ldots, r);$$

dunque u corrisponde ad x in una reciprocità involutoria, che risulta degenere se, e soltanto se, tale è la quadrica, la specie di tale reciprocità degenere coincidendo allora con l'indice di specializzazione della quadrica. Pertanto:

Affinché la quadrica (1) *sia degenere, occorre e basta che si annulli il determinante della matrice (simmetrica)* $\| a_{ij} \|$. *In tal caso, detto* $r-k$ *il rango di questa matrice* $(0 \leq k \leq r-1)$, *la quadrica* (1) *risulta specializzata* $k+1$ *volte.*

È ben noto, e si dimostra agevolmente, che il primo membro della (1) può sempre venir trasformato in una somma di quadrati, operando una sostituzione lineare invertibile sulle x (a coefficienti complessi). Si ottiene così per la quadrica l'equazione canonica

$$x_h^2 + x_{h+1}^2 + \ldots + x_r^2 = 0,$$

dove h denota l'indice di specializzazione [1]. Ne consegue che: *Due quadriche di S_r non specializzate, o specializzate uno stesso numero di volte, risultano sempre fra loro omografiche (nel campo complesso).*

Sia ora f una quadrica non specializzata di S_r. La reciprocità involutoria (o polarità) non degenere da essa definita, muta ogni S_p di S_r in un S_{r-p-1} polare, luogo dei punti comuni agli iperpiani polari dei singoli punti di S_p. In virtù dei nn. 13, 14, è chiaro che lo spazio S_p appartiene al relativo S_{r-p-1} polare se, e soltanto se, S_p giace su f. In quest'ipotesi deve dunque risultare $p \leq r - p - 1$, e quindi

$$p \leq \left[\frac{r-1}{2}\right] = s,$$

ove si è posto $r = 2s + 2$ se r è pari, ed $r = 2s + 1$ se r è dispari. L'estremo superiore s così ottenuto per p è sempre raggiunto, ossia: *La dimensione massima degli spazi lineari giacenti su di una quadrica non degenere di S_r vale $[(r-1)/2]$.*

Infatti la quadrica $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 0$ contiene p. es. lo spazio S_s dato dalle

$$x_0 + ix_1 = x_2 + ix_3 = \ldots = x_{2s} + ix_{2s+1} = x_{2s+2} = 0, \text{ se } r = 2s + 2,$$

oppure dalle

$$x_0 + ix_1 = x_2 + ix_3 = \ldots = x_{2s} + ix_{2s+1} = 0, \quad \text{se } r = 2s + 1.$$

Applicando questo risultato alla V_{r-k-2}^2 considerata (per $n = 2$) nel secondo capoverso del presente numero, si ottiene che:

[1] Per $h = 0$, si ottiene quest'equazione riferendo la quadrica ad un simplesso autopolare (la cui esistenza può stabilirsi mediante semplici considerazioni geometriche) e con un'opportuna scelta del punto unità. Il caso in cui sia $h = k + 1 > 0$ si riconduce poi subito al caso $h = 0$, in base a ciò che si è detto nel secondo capoverso del presente numero.

La dimensione massima degli spazi lineari giacenti su di una quadrica di S_r specializzata $k+1$ volte vale $[(r+k)/2]$.

Va rilevato che, in virtù della seconda proposizione del n. 14, oppure in base al secondo capoverso del presente numero, un cono (anche non quadrico) di vertice S_k ammette in un qualunque punto semplice P un iperpiano tangente che lo tocca lungo tutto lo spazio generatore PS_k. Invece un iperpiano tangente di una quadrica non degenere tocca la quadrica in un sol punto, che è il trasformato dell'iperpiano nella polarità rispetto alla quadrica. Avuto riguardo alla proposizione finale del n. 13, si ha quindi che:

Una quadrica di S_r $(r \geq 2)$ risulta specializzata se, e soltanto se, esiste qualche iperpiano di S_r che la seghi in una quadrica specializzata più di una volta (o che, in particolare, ne faccia parte).

Una V^n_{r-1} irriducibile di S_r $(r \geq 2,\ n \geq 2)$, che contenga un punto $(n-1)$-plo O, denominasi brevemente un *monoide di vertice* O. In particolare, per $n = 2$, ogni quadrica irriducibile può venir considerata come un monoide di vertice un qualunque suo punto semplice. Un monoide di S_r ammette una notevole rappresentazione su di un S_{r-1}, detta *proiezione stereografica*, ottenibile col proiettare i suoi punti dal vertice su di un iperpiano di S_r, secondo quanto ora esporremo.

Sia $V = V^n_{r-1}$ un monoide di S_r di vertice O, e denotiamo con U il V^{n-1}_{r-1}-cono (di vertice O) tangente ad esso nel punto O. Una retta generica di S_r uscente da O ha ivi incontro $(n-1)$-punto con V, e quindi ha in comune con V uno ed un sol punto P ulteriore. Fanno soltanto eccezione le rette l per O giacenti su U, ciascuna delle quali — avendo in O incontro almeno n-punto con V — o non sega V fuori di O oppure giace per intero su V: nei due casi, rispettivamente, si potrà dire che il suddetto punto P viene a coincidere con O oppure rimane indeterminato sulla l. A norma del n. 13, e avuto riguardo all'irriducibilità di V, le rette l che presentano la seconda particolarità costituiscono — se $r > 2$ — un cono (luogo di ∞^{r-3} rette per O, e quindi) di dimensione $r-2$, intersezione di V ed U, che denoteremo con W; invece se $r = 2$ non vi sono rette presentanti tale particolarità, onde allora W viene a mancare.

Preso in S_r un qualunque iperpiano $S' = S'_{r-1}$ non passante per O, siano U' e W' rispettivamente le sezioni di U e W con esso. Associando ad un punto P di V la sua proiezione P' da O su S', si viene a stabilire una corrispondenza manifestamente *biunivoca* fra

V ed S'; fanno soltanto eccezione alla biunivocità della corrispondenza:

su V *il punto* O, che resta associato ai singoli punti P' di U', ed inoltre (se $r > 2$) su S' *i singoli punti di* W', ciascuno dei quali è associato ad ogni punto P della retta che lo proietta da O.

Tutto ciò si traduce subito analiticamente, poggiando sul n. 13. Assunto O come punto $(1, 0, \ldots, 0)$ ed S' come iperpiano $x_0 = 0$, talché i vari punti P' di S' avranno in questo spazio coordinate omogenee $(x_1', x_2', \ldots, x_r')$, l'equazione di V sarà del tipo

$$x_0\varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_r) + \varphi_n(x_1, \ldots, x_r) = 0, \tag{2}$$

dove φ_{n-1} e φ_n denotano due forme prime fra loro nelle $x_1, \ldots, x_r$, dei gradi rispettivi $n - 1$ ed n. Allora $\varphi_{n-1} = 0$ e $\varphi_{n-1} = \varphi_n = 0$ sono le equazioni di U e di W in S_r, ed anche le equazioni di U' e di W' in S'; e la corrispondenza posta fra V ed S' dalla proiezione stereografica si rappresenta con le equazioni:

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_r =$$
$$= -\varphi_n(x_1', \ldots, x_r') : x_1'\varphi_{n-1}(x_1', \ldots, x_r') : \ldots : x_r'\varphi_{n-1}(x_1', \ldots, x_r'), \tag{3}$$

formanti una r i s o l u z i o n e   p a r a m e t r i c a della (2).

Particolare interesse offre il caso $(n = 2)$ in cui V sia una *quadrica* V_{r-1}^2 di S_r. In quest'ipotesi, U non è che l'iperpiano tangente a V nel punto (semplice) O, e W diventa la V_{r-2}^2 intersezione di V con tale iperpiano; pertanto U' è uno spazio subordinato S_{r-2} di S_r, ed inoltre (se $r > 2$) W' è una quadrica V_{r-3}^2 di questo spazio. La proiezione stereografica offre così un procedimento per ridurre questioni su di una V_{r-1}^2 di S_r a questioni concernenti una V_{r-3}^2 di S_{r-2}; e si noti che *se la prima di tali quadriche è non degenere lo stesso è della seconda, e viceversa*, in virtù dell'ultimo enunciato del presente numero. In tale ipotesi, applicando $[(r-1)/2]$ volte successivamente quel procedimento, si viene a sostituire a V_{r-1}^2 una V_1^2 od una V_0^2 non degenere, secondoché r è pari o dispari. Si noti che sia V_1^2 che V_0^2 ammettono i loro punti come spazi di dimensione massima; però, mentre V_0^2 si riduce a *due punti distinti* (ottenibili risolvendo un'equazione di 2° grado), i punti di V_1^2 sono ∞^1 e costituiscono *un unico sistema continuo* (i punti della conica V_1^2 ottenendosi tutti determinandone uno e poi proiettando V_1^2 stereograficamente da esso, il che fornisce per quei punti una rappresentazione del tipo

(3), con $r = n = 2$, in cui figura un unico parametro $x'_1 : x'_2$). Più generalmente, ci proponiamo di stabilire il seguente teorema.

Gli spazi S_s di dimensione massima giacenti su di una quadrica V non degenere di S_r costituiscono un unico sistema continuo $\infty^{(s+1)(s+2)/2}$, nell'ipotesi che $r = 2s + 2$ sia pari, tali spazi potendosi allora determinare birazionalmente mediante $(s+1)(s+2)/2$ parametri. Invece, se $r = 2s + 1$ è dispari, gli S_s di V si distribuiscono in due diversi sistemi $\infty^{s(s+1)/2}$, gli spazi di ciascun sistema potendosi determinare birazionalmente mediante $s(s+1)/2$ parametri.

Poiché il teorema è già acquisito per $s = 0$, potremo supporre $s > 0$ (ossia $r \geq 3$), ed ammettere la validità dei risultati enunciati nel caso delle quadriche non degeneri di S_{r-2}. Effettuiamo la proiezione stereografica di V da un suo punto O qualsiasi, adottando in relazione ad essa le notazioni precedenti, ed esaminiamo come vengano a rappresentarsi su $S' = S'_{r-1}$ gli spazi S_s di V_{r-1}.

Uno spazio S_s (di dimensione massima) che giaccia su V e non contenga O, non appartiene all'iperpiano U tangente a V in O; ed invero, se S_s stesse in U, lo spazio $S_{s+1} = OS_s$ dovrebbe giacere su V, il che non può essere, in quanto altrimenti V conterrebbe qualche spazio di dimensione $s + 1$. Dunque S_s sega U secondo uno spazio S_{s-1}, giacente su U e V, e quindi pure su W, e non passante per O. Ne consegue che la proiezione di S_s da O su S' è uno spazio S'_s di S', non giacente nello spazio $U' = S_{r-2}$ di appartenenza della quadrica W' e contenente uno spazio S'_{s-1} (di dimensione massima) di questa, proiezione di S_{s-1} da O su S'. Viceversa, un qualunque spazio S'_s di S'_{r-1} che non giaccia in U' e contenga un S'_{s-1} di W', è congiunto ad O da uno spazio di dimensione $s + 1$, avente in comune con V lo spazio OS'_{s-1} (di dimensione s); tale spazio di dimensione $s + 1$ sega quindi V ulteriormente secondo un S_s non passante per O, il quale si proietta da O su S' nello spazio S'_s inizialmente considerato.

Per ipotesi, gli S'_{s-1} di W' costituiscono uno o due sistemi distinti, secondoché $r - 2$ (e quindi pure r) è pari o dispari. Lo stesso sarà degli spazi S'_s dianzi considerati, e perciò anche degli S_s di V. Inoltre, determinati che siano birazionalmente gli spazi S'_{s-1} di W' di un sistema, mediante un certo numero ν' di parametri, lo stesso potrà ottenersi per gli S'_s relativi, e quindi pure per gli S_s di V del corrispondente sistema, pur di considerare — oltre ai suddetti ν' — un conveniente numero $\nu - \nu'$ di parametri addizionali, atti a determinare birazionalmente in $S' = S'_{r-1}$ gli $\infty^{(r-1)-(s-1)-1}$ spazi S'_s

che contengono un S'_{s-1} assegnato. Si ha pertanto: $\nu - \nu' = r - s - 1$. Sicché, se $r = 2s + 2$ è pari, essendo per l'induzione ammessa $\nu' = s(s+1)/2$, risulta

$$\nu = s(s+1)/2 + (s+1) = (s+1)(s+2)/2;$$

se invece $r = 2s + 1$ è dispari, si ha $\nu' = s(s-1)/2$, quindi

$$\nu = s(s-1)/2 + s = s(s+1)/2.$$

Riferiamoci ora — più particolarmente — al caso $r = 2s + 1$, e dimostriamo che:

Due spazi S_s, $\bar{S}_s$ di dimensione massima di una quadrica V^2_{2s} non degenere di S_{2s+1}, i quali si seghino lungo un S_t ($s \geq 0$, $-1 \leq t \leq s$), appartengono allo stesso sistema od a sistemi diversi, secondoché $s + t$ è pari o dispari (ossia a seconda che s e t hanno o non hanno la stessa parità).

I risultati enunciati sono intanto evidenti se $s = 0$, oppure se $t = s$; basterà quindi dimostrarli nell'ipotesi che si abbia $s > 0$, $-1 \leq t \leq s - 1$. A tal uopo procediamo per induzione rispetto ad s, ammettendoli per le quadriche di S_{2s-1}, e premettiamo un'osservazione.

Consideriamo tre spazi $S^{(1)}_s$, $S^{(2)}_s$, $S^{(3)}_s$ giacenti su V, e supponiamo che i primi due si seghino lungo un S_{s-1}, ossia siano congiunti da un S_{s+1}. Poiché S_{s+1} non può stare su V, ciò val quanto dire che $S^{(1)}_s$ ed $S^{(2)}_s$ costituiscono assieme la completa intersezione di S_{s+1} e V, e che S_{s+1} tocca V nei singoli punti di S_{s-1}. Ne consegue che lo spazio, S_h, intersezione di S_{s+1} ed $S^{(3)}_s$ (di dimensione $h \geq 0$, in quanto questi due spazi stanno in S_{2s+1}) giace in uno ed u n o s o l o dei due spazi $S^{(1)}_s$, $S^{(2)}_s$, e quindi sega S_{s-1} secondo un S_{h-1}; invero, in caso contrario, S_h starebbe in S_{s-1} e quindi il relativo S_{2s-h} polare conterrebbe $S^{(3)}_s$ ed S_{s+1}, sicché l'intersezione di questi due spazi avrebbe dimensione $\geq s + (s+1) - (2s - h) > h$, contro al supposto. Pertanto h ed $h - 1$ sono (in un certo ordine) le dimensioni degli spazi secondo cui $S^{(3)}_s$ sega $S^{(1)}_s$ ed $S^{(2)}_s$, sicché *tali dimensioni hanno sempre parità diverse.*

Per dimostrare il teorema enunciato, scegliamo sulla $V = V^2_{2s}$ un punto O che non stia né su S_s né su $\bar{S}_s$, e proiettiamo V stereograficamente su S' come dianzi. Denotiamo con S'_s, $\bar{S}'_s$ le proiezioni stereografiche di S_s, $\bar{S}_s$, con S'_{s-1}, $\bar{S}'_{s-1}$ gli spazi secondo cui S'_s, $\bar{S}'_s$ segano U', e con $S'_{t'-1}$ lo spazio intersezione di S'_{s-1}, $\bar{S}'_{s-1}$. Sappiamo che S'_{s-1} ed $\bar{S}'_{s-1}$ sono due spazi di dimensione massima di W', i quali appartengono allo stesso sistema se, e soltanto se, S_s ed S'_s sono due spazi dello stesso sistema di V. Dunque, per l'induzione ammessa, il teorema segue subito se proviamo che *t e t' hanno sempre la stessa parità.*

All'uopo basta ricordare che gli spazi — di dimensione $s+1$ — che proiettano S'_s ed $\bar{S}'_s$ da O, segano su V le coppie di spazi (S_s, OS'_{s-1}) ed $(\bar{S}_s, O\bar{S}'_{s-1})$. Pertanto gli spazi intersezioni delle coppie $(S_s, \bar{S}_s)$ ed $(OS'_{s-1}, O\bar{S}'_{s-1})$, e cioè S_t ed $OS'_{t'-1}$, hanno dimensioni t e t' della stessa parità, tali dimensioni dovendo risultare di parità opposta alla dimensione dello spazio intersezione della coppia $(S_s, O\bar{S}'_{s-1})$.

Se, com'è lecito, si suppone di avere scelto O su V in modo generico rispetto ad S_s, $\bar{S}_s$ *risulta anzi* $t = t'$, in quanto allora $S'_{t'-1}$ non è altro che la proiezione stereografica dello spazio segato da S_t sull'iperpiano U tangente in O alla V.

16. **Hessiana, steineriana e loro generalizzazioni.** — Data una forma f di S_r, di ordine $n \geq 3$, fissiamo comunque due interi positivi s, t la cui somma non superi n, e poniamo

$$k = n - s - t + 1.$$

Allora, in forza del teorema di permutabilità (n. 12, II), l'essere per due dati punti y, z:

$$\Delta_z^s \Delta_y^t f(x) = 0 \quad \text{identicamente nelle } x \tag{1}$$

equivale a ciò che risulti

$$\Delta_y^t \Delta_z^s f(x) = 0 \quad \text{identicamente nelle } x. \tag{2}$$

Applicando il teorema dell'appartenenza (n. 12, III), se $k = 1$, oppure il primo teorema del n. 13, se $k > 1$, ne consegue che:

Se la polare t-ma del punto y rispetto ad f ha un punto k-plo in z, allora la polare s-ma del punto z rispetto ad f ha un punto k-plo in y ($s \geq 1$, $t \geq 1$, $k \geq 1$, l'ordine di f essendo $n = s + t + k - 1$).

Questo risultato generale comprende, per $k = 1$, il teorema di reciprocità, già altrimenti acquisito nel n. 12, IV. Supposto $k \geq 2$, osserviamo che il primo membro della (1) è una forma di grado $k - 1$ nelle x, i cui coefficienti risultano a loro volta forme nelle y, nelle