UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea in Matematica
AL2 - Algebra 2 - Gruppi, Anelli e Campi - A.A. 2008/2009

Recupero I esonero

MATRICOLA: ....
COGNOME: .... **NOME:** ....

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'utilizzo di libri e appunti.

ESERCIZIO 1. Sia $G := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_3,\ a \neq 0,\ b \neq 0 \right\}$.

(a) (3 pt) Provare che G con l'usuale moltiplicazione fra matrici è un gruppo e dire se G è abeliano.
(b) (3 pt) Dimostrare che $H := \{M \in G : \det(M) = 1\}$ è un sottogruppo di G. Dire se H è un sottogruppo normale.
(c) (5 pt) Provare che H è ciclico e trovare un suo generatore.
(d) (3 pt) Dimostrare che ogni elemento di G che non sta in H ha ordine 2.
(e) (3 pt) Determinare il centro di G.

ESERCIZIO 2. Siano date in S_9 le seguenti permutazioni:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 7 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 3 & 1 & 7 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) (3 pt) Verificare che σ e τ sono coniugate in S_9.
(b) (2 pt) Trovare, se esistono, una permutazione pari ed una dispari che coniughino σ in τ.
(c) (2 pt) Stabilire se il sottogruppo ciclico generato da σ è normale in S_9.

ESERCIZIO 3. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e sia $a \in G$ un elemento fissato. Si consideri l'applicazione:

$$f_a : (G, \cdot) \to (G, \cdot), \quad g \mapsto aga^{-1}.$$

(a) (3pt) Dimostrare che f_a è un omomorfismo di gruppi e trovare l'immagine ed il $ker(f_a)$.
(b) (2pt) Sia $H := \{g \in G : f_a(g) = g\}$. Stabilire se H è un sottogruppo di G.
(c) (4 pt) Dimostrare che $o(f_a) \mid o(a)$, dove $o(f_a)$ è il più piccolo intero positivo m tale che $f_a^m = id_G$ (se m non esiste si pone per definizione $m = \infty$)).