Campo dei quozienti di un anello.

Sia D un dominio (anello commutativo, unitario e integro) e $D^\star := D\backslash(0)$. Consideriamo il prodotto cartesiano $D \times D^\star := \{(a,b) \mid a,b \in D\}$. In $D \times D$ consideriamo la relazione:

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Sia $Q(D) := \frac{D\times D}{\sim}$ e consideriamo su $Q(D)$ le due seguenti operazioni binarie:

- $[(a,b)] + [(c,d)] := [(ad+bc, bd)]$ (somma);
- $[(a,b)] \cdot [(c,d)] := [(ac, bd)]$ (prodotto).

Dimostrare che queste due operazioni sono ben definite sull'insieme quoziente, cioè presi comunque $a,c,a',c' \in D$ e $b,d,b',d' \in D^\star$, si ha che:

- $(a,b) \sim (a',b'), \quad (c,d) \sim (c',d') \Rightarrow$
  $(ad+bc, bd) \sim (a'd'+b'c', b'd')$;
- $(a,b) \sim (a',b'), \quad (c,d) \sim (c',d') \Rightarrow (ac,bd) \sim (a'c', b'd')$.

Verificare che:

- $[(0,b)] = [(0,b')]$, per ogni $b,b' \in D^\star$ e che questa classe è l'elemento neutro rispetto alla somma di $Q(D)$.
- la classe $[(-a,b)]$ è l'opposto di $[(a,b)]$, per ogni coppia $(a,b) \in D \times D^\star$.
- $[(b,b)] = [(b',b')]$, per ogni $b,b' \in D^\star$ e che questa classe è l'elemento neutro rispetto al prodotto di $Q(D)$.
- $(Q(D),+,\cdot)$ è un anello commutativo unitario.
- data la classe $[(a,b)]$, con $a,b \in D^\star$ (cioè $[(a,b)] \neq 0$), il suo inverso moltiplicativo è dato dalla classe $[(b,a)]$.
- $(Q(D),+,\cdot)$ è un campo.

  $Q(D)$ è il **campo dei quozienti** di D, ovvero il più piccolo campo (a meno di isomorfismi) che contiene D. D si immerge in $Q(D)$ tramite l'omomorfismo:

  $$\varphi : D \hookrightarrow Q(D), \quad a \mapsto [(a,1)].$$

  Ogni elemento di $Q(D)$ si può scrivere come il quoziente di due elementi di D (ponendo $[(a,b)] =: \frac{a}{b}$). Infatti se identifichiamo un elemento $a \in D$ con la sua immagine tramite φ, $[(a,1)]$, abbiamo che un qualsiasi elemento $[(a,b)]$ di $Q(D)$ è del tipo $[(a,1)] \cdot [(b,1)]^{-1}$.