Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL2 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Esercitazione 1 (3 ottobre 2008)

Esercizio 1. Sia $X := \{x, y\}$, dimostrare che il sottogruppo generato da X coincide con l'insieme:

$$H := \{x^{n_1}y^{m_1}x^{n_2}y^{m_2}\cdots x^{n_k}y^{m_k} \,:\, k \in \mathbb{N}_+, n_i, m_i \in \mathbb{Z}, \text{ per } i = 1, \dots, k\}\,.$$

Se inoltre x e y sono permutabili (ovvero $xy = yx$), si dimostri che:

$$\langle X\rangle = \{x^n y^m \,:\, n, m \in \mathbb{Z}\}\,,$$

e $\langle X\rangle$ è abeliano.

Soluzione. Facciamo vedere che $H = \bigcap_{X \subseteq K \leq G} K$. $X \subseteq H$ e dunque il contenimento $\langle X\rangle \subseteq H$ è chiaro. Sia dunque $K \leq G$ tale che $X \subseteq K$, allora $x, y \in K$ e dunque $x^{n_i}, y^{m_j} \in K$ per ogni $n_i, m_j \in \mathbb{Z}$. Ne segue che $H \subseteq K$ per ogni K tale che $X \subseteq K \leq G$.
Se x e y sono permutabili è sufficiente osservare che anche $x^n y^m = y^m x^n$ per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$ e dunque raggruppando tutte le potenze di x e le potenze di y si ha la scrittura desiderata. Il fatto che $\langle X\rangle$ sia abeliano segue con la stessa argomentazione. $\square$

Esercizio 2. Siano H, K sottogruppi di un gruppo G. Sia $X := H \cup K$. Provare che:

(a) il sottogruppo generato da X coincide con l'insieme:

$$\{h_1k_1h_2k_2\cdots h_sk_s \,:\, s \in \mathbb{N}_+, h_i \in H, k_i \in K \text{ per } i = 1, \dots, s\}\,;$$

(b) se G è abeliano, il sottogruppo generato da X coincide con l'insieme:

$$HK = \{hk \,:\, h \in H,\, k \in K\}\,.$$

Soluzione.

(a) Facciamo vedere che

$$G' := \{h_1k_1h_2k_2\cdots h_sk_s \,:\, s \in \mathbb{N}_+, h_i \in H, k_i \in K \text{ per } i = 1, \dots, s\}$$

è un gruppo (sottogruppo di G). È chiaro che se $x, y \in G'$ anche $xy \in G'$ essendo una espressione formale dello stesso tipo, inoltre $1 \in H$ e $1 \in K$ quindi $h_1k_1 = 1 \cdot 1 = 1 \in G'$. Per ogni $i = 1, \dots, s$ $h_i^{-1} \in H$ e $k_i^{-1} \in K$, dunque se $x := h_1k_1\cdots h_sk_s$ si ha che $x^{-1} = k_s^{-1}h_s^{-1}\cdots k_1^{-1}h_1^{-1} \in G'$. Questo dimostra che G' è un sottogruppo di G. Sia ora $L \leq G$ tale che $H \cup K \subseteq L$, allora è chiaro che $L \supseteq G'$ perché L è un gruppo. Dunque il sottogruppo $G' \supseteq H \cup K$ e se L è un altro sottogruppo di G che contiene $H \cup K$ si ha che $G' \subseteq L$. Ne segue che $G' = \langle X\rangle$.

(b) Stessa dimostrazione dell'Esercizio 1. $\square$

Esercizio 3. Siano H e K sottogruppi di un gruppo G. Dimostrare che:

(a) HK è un sottogruppo di G se e soltanto se $HK = KH$.

(b) Se H (oppure K) è normale allora HK è un sottogruppo di G.

Soluzione.

(a) Supponiamo $HK \leq G$, allora $H, K \subseteq HK$ da cui $kh \in HK$ per ogni $k \in K$ e $h \in H$, ovvero $KH \subseteq HK$. Sia ora $x \in HK$, poiché HK è un gruppo anche $x^{-1} \in HK$, dunque se $x = hk$ per certi $h \in H$ e $k \in K$, si ha che $x^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$. Poiché ciò vale per ogni $x \in HK$ si ha che $HK \subseteq KH$.
Supponiamo viceversa che $HK = KH$. $1 \in HK$ e se $x \in HK$, $x = hk$ per un qualche $h \in H$ e $k \in K$. Ne segue che $y := k^{-1}h^{-1} \in KH = HK$ e $xy = 1$. Facciamo vedere che se $x, y \in HK$ anche $xy \in HK$; sia $x = hk$ e $y = h_1k_1$, allora $xy = hkh_1k_1 = h(h'k')k_1$ dato che $HK = KH$, dunque $xy = (hh')(k'k_1) \in HK$.

(b) Dal fatto che H è normale segue che $HK = KH$ e dunque è un sottogruppo di G. $\square$

Esercizio 4. Mediante il procedimento utilizzato per dimostrare il teorema di Cayley, si identifichino i seguenti gruppi come sottogruppi di un gruppo simmetrico:

$$(\mathbb{Z}_4, +); \quad (V_4, \cdot); \quad (S_3, \circ).$$

Soluzione. Si verifica facilmente che le applicazioni proposte sono effettivamente isomorfismi.

(a) Denotiamo con $0, 1, 2, 3$ gli elementi di $\mathbb{Z}_4$ e sia $\sigma := (1234) \in S_4$. Z_4 è isomorfo a $\langle\sigma\rangle$ tramite il seguente isomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & \langle\sigma\rangle \\ 0 & \longmapsto & \mathrm{id} \\ 1 & \longmapsto & \sigma \\ 2 & \longmapsto & \sigma^2 = (13)(24) \\ 3 & \longmapsto & \sigma^3 = (1432). \end{array}$$

(b) Denotiamo con $1, x, y, z$ i 4 elementi di V_4 ricordando che $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ e $xy = z = yx$, $zy = x = yz$ e $xz = y = zy$. Un sottogruppo di S_4 isomorfo a V_4 è dunque dato da: $H := \{\mathrm{id}, (12), (34), (12)(34)\}$, dove:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V_4 & \longrightarrow & H \\ 1 & \longmapsto & \mathrm{id} \\ x & \longmapsto & (12) \\ y & \longmapsto & (34) \\ z & \longmapsto & (12)(34). \end{array}$$

(c) S_3 è di per sé un gruppo simmetrico e dunque non c'è niente da dimostrare. Il procedimento del Teorema di Cayley può essere comunque utilizzato per immergere S_3 in S_6: $S_3 = \{\mathrm{id}, (12), (23), (13), (123), (132)\}$. Etichettiamo tali elementi nel seguente modo: $e := \mathrm{id}$; $x := (12)$; $y := (23)$; $z := (13)$; $u := (123)$, $v := (132)$. Possiamo dunque vedere S_6 come $S(X)$ dove $X := \{e, x, y, z, u, v\}$. Allora l'isomorfismo cercato è dato da:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : S_3 & \longrightarrow & K \leq S_6 \\ e & \longmapsto & \mathrm{id} \\ x & \longmapsto & (ex)(yu)(zv) \\ y & \longmapsto & (ey)(xv)(zu) \\ z & \longmapsto & (ez)(xu)(yv) \\ u & \longmapsto & (euv)(xzy) \\ v & \longmapsto & (evu)(xyz). \end{array}$$

Esercizio 5. Si provi che l'insieme:

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R};\ a, b \text{ non contemporaneamente nulli} \right\}$$

è un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$ (con l'usuale prodotto righe per colonne). Mostrare inoltre che S è isomorfo a $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Soluzione. Innanzitutto $I_2 \in S$. Osserviamo che la condizione a, b non contemporaneamente nulli è equivalente a $\det(A) = a^2 + b^2 \neq 0$. Dunque $S \subseteq GL_2(\mathbb{R})$.

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

e dunque anche $A^{-1} \in S$. Siano ora:

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in S \Longrightarrow AB = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix},$$

con $a' := ac - bd$ e $b' = ad + bc$. Resta da far vedere che a' e b' non possono essere contemporaneamente nulli, o equivalentemente che $(a')^2 + (b')^2 \neq 0$. Si ha che:

$$(a')^2 + (b')^2 = a^2b^2 - 2acbd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd = a^2b^2 + b^2d^2 + b^2c^2 \neq 0.$$

L'isomorfismo con $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ è dato dall'applicazione:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : S & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ A & \longmapsto & a + ib, \end{array}$$

dove $A := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Il fatto che φ sia biiettiva è banale. Per la condizione $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$, sia $B := \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$; abbiamo già visto che $AB = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix}$. Ora se $x := a + ib$ e $y := c + id$ sono rispettivamente $\varphi(A)$ e $\varphi(B)$, si ha che:

$$xy = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) = \varphi(AB). \quad \square$$

Esercizio 6. Dimostrare che:

$$G := \langle a, b : a^n = b^2 = 1;\ (ab)^2 = 1 \rangle$$

è un gruppo isomorfo a D_n.

Soluzione. Dal fatto che $abab = 1$ si ricava $a^{-1} = bab$; inoltre essendo $b^2 = 1$ si ha che $b^{-1} = b$. Dunque per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $b^{-1}a^k b = a^{-k}$ (elevando alla k l'espressione precedente) e quindi, $ba^k \overset{(*)}{=} a^{-k}b$. Un generico elemento $x \in G$ è della forma: $x = a^{h_1}b^{\epsilon_1}a^{h_2}b^{\epsilon_2}\dots a^{h_s}b^{\epsilon_s}$, con $h_i \in \{0, \dots, n-1\}$ e $\epsilon \in \{0, 1\}$. Usando $(*)$ possiamo riscrivere x nel seguente modo $x = a^{h_1 - h_2 + \dots + (-1)^{s-1}h_s} b^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_s} = a^h b^\epsilon$, per un qualche $h \in \{0, \dots, n-1\}$ ed $\epsilon \in \{0, 1\}$. Dunque ogni elemento di G è di questa forma per $h = 0, \dots, n-1$ ed $\epsilon = 0, 1$. Allora $|G| \leq 2n$.
Il gruppo D_n è generato dalla rotazione di $2\pi/n$, denotata con ρ e da un qualunque ribaltamento σ. In D_n $\rho^n = 1 = \sigma^2$, inoltre $\sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$ da cui $(\rho\sigma)^2 = \mathrm{id}$. Dunque G contiene una copia isomorfa di D_n. Dalle considerazioni fatte sull'ordine di G segue che G è isomorfo a D_n. $\square$

Esercizio 7. Sia G un gruppo e sia $\{H_i\}_{i \in I}$ l'insieme dei suoi sottogruppi propri. Mostrare che $G = \bigcup_{i \in I} H_i$ se e soltanto se G non è ciclico.

Soluzione. Supponiamo che G non sia ciclico, allora $G = \bigcup_{x \in G} \langle x \rangle$ e $G \supsetneq \langle x \rangle$ per ogni $x \in G$. Se invece $G = \langle x \rangle$ per qualche $x \in G$, allora un sottogruppo proprio H di G è tale che $x \notin H$, altrimenti $H = G$, dunque $\bigcup H_i \subseteq G \setminus \{x\}$. $\square$

Esercizio 8. Sia G il gruppo di Heisenberg. Dimostrare che:

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2b & 2c \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\},$$

è un sottogruppo normale di G.

Soluzione. È chiaro che $I_3 \in N$. Siano $A, B \in N$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2b & 2c \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ B := \begin{pmatrix} 1 & 2b' & 2c' \\ 0 & 1 & 2a' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora si ha che:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2(b+b') & 2(c' + 2a'b) \\ 0 & 1 & 2(a+a') \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N.$$

Inoltre:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2b & 2(2ab - c) \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N.$$

Resta da far vedere che N è normale nel gruppo di Heisenberg H. Sia $C \in H$, allora $C = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xz - y \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dunque $C^{-1}AC = $

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2b & 2bz + 2c - 2ax \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N.$$ $\square$

Esercizio 9. Si dimostri che:

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\},$$

è un sottogruppo ciclico di $GL_3(\mathbb{R})$.

Soluzione. Facciamo vedere che H è generato dal seguente elemento:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per induzione su $n \geq 1$. La base dell'induzione è facilmente verificata, supponiamo dunque che:

$$A^{n-1} := \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{(n-1)^2-(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

allora

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{(n-1)^2-(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $n < 0$ si ha:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e, anche in questo caso, $A^{-n} = (A^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{(-n)^2+n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dunque H è generato da A. $\square$

Esercizio 10. Mostrare che il più piccolo sottogruppo di S_n contenente la trasposizione (12) e l'n-ciclo $(12\cdots n)$ è S_n.

Suggerimento: utilizzare il fatto che ogni elemento di S_n si scrive come prodotto di trasposizioni.

Soluzione. Tenendo presente il suggerimento è sufficiente dimostrare che nel sottogruppo generato dai due elementi dati ci sono tutte le trasposizioni di S_n. Ma questo segue immediatamente della seguente proprietà:

$$(k\,k{+}1) = (12\cdots n)\circ(k{-}1\,k)\circ(12\cdots n)^{-1} = (12\cdots n)\circ(k{-}1\,k)\circ(n\,n{-}1\cdots 1). \quad \square$$

Esercizio 11. Trovare tutti i sottogruppi di Klein contenuti in S_4.

Soluzione. Tutti e soli i sottogruppi di Klein di S_4 sono:

$$V_4^{(1)} := \{\mathrm{id}, (12), (34), (12)(34)\}\,;$$
$$V_4^{(2)} := \{\mathrm{id}, (13), (24), (13)(24)\}\,;$$
$$V_4^{(3)} := \{\mathrm{id}, (14), (23), (14)(23)\}\,. \quad \square$$