Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL2 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Esercitazione 3 (31 ottobre 2008)

Esercizio 1. Mostrare che il gruppo diedrale D_n è isomorfo al prodotto semi-diretto di $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_n$.

Soluzione. Siano σ una riflessione e ρ la rotazione di $\frac{2\pi}{n}$, allora $\mathbb{Z}_2 \cong \langle\sigma\rangle$ e $\mathbb{Z}_n \cong \langle\rho\rangle$. È subito visto che $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_n$ verificano le seguenti condizioni:

(a) $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_n \leq D_n$ e $\mathbb{Z}_n$ è normale in D_n.

(b) $D_n = \mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_n$.

(c) $\mathbb{Z}_2 \cap \mathbb{Z}_n = \{\mathrm{id}\}$.

Dunque $D_n = \mathbb{Z}_2 \sqcup_\varphi \mathbb{Z}_n$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo abeliano.

(a) Dimostrare che gli elementi di ordine finito di G formano un sottogruppo (detto *sottogruppo di torsione* di G).

(b) Trovare il sottogruppo di torsione di $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}, +)$.

Soluzione.

(a) Sia H il sottoinsieme di G composto dagli elementi di ordine finito. È noto che $\forall a \in G$ $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(a^{-1})$, dunque $a \in H \iff a^{-1} \in H$. Chiaramente $e \in H$. Siano $a, b \in H$, $n := \mathrm{ord}(a)$ e $m := \mathrm{ord}(b)$, si ha:

$$(ab)^{mn} = a^{mn}b^{mn} = (a^n)^m(b^m)^n = e^m e^n = e;$$

ovvero $ab \in H$.

(b) Si verifica facilmente che i sottogruppi di torsione richiesti sono, nell'ordine:

$$\{1, -1\}, \quad \left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \ldots, n-1\}\right\}, \quad \mathbb{Z}_{12}.$$

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n con base $\{e_1, \ldots, e_n\}$.
Sia S_n il gruppo simmetrico su n elementi.
Si consideri l'applicazione $\star : S_n \times V \longrightarrow V$ definita nel seguente modo: se $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ e $\sigma \in S_n$, allora:

$$\sigma \star v = \lambda_1 e_{\sigma(1)} + \ldots \lambda_n e_{\sigma(n)}.$$

(a) Provare che $\star$ è un'azione di S_n sull'insieme V.

(b) Siano $n = 4$, $v := e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $w := e_1 + e_3$.

i. Determinare $(1342) \star v$, $(1432) \star w$, $(312) \star v$, $(412) \star w$, $(14)(32) \star v$, $(14) \star w$.

ii. Determinare l'orbita e lo stabilizzatore di v e w.

iii. Stabilire se lo stabilizzatore di w è normale in S_4.

Soluzione.

(a) Sia $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, allora $\mathrm{id} \star v = \lambda_1 e_{\mathrm{id}(1)} + \cdots + \lambda_n e_{\mathrm{id}(n)} = v$. Siano σ_1 e $\sigma_2 \in S_n$;

$$(\sigma_2 \circ \sigma_1) \star v = \lambda_1 e_{(\sigma_2 \circ \sigma_1)(1)} + \cdots + \lambda_n e_{(\sigma_2 \circ \sigma_1)(n)} = \\ = \sigma_2 \star (\lambda_1 e_{\sigma_1(1)} + \cdots + \lambda_n e_{\sigma_1(n)}) = \sigma_2 \star (\sigma_1 \star v).$$

(b) i. Si verifica facilmente che $\sigma \star v = v$ per ogni $\sigma \in S_4$. $(1432) \star w = e_1 + e_4$; $(412) \star w = e_2 + e_3$; $(14) \star w = e_3 + e_4$.

ii. $\mathcal{O}(v) = \{v\}$; $\mathcal{O}(w) = \{e_i + e_j \,|\, i, j = 1, 2, 3, 4;\ i \neq j\}$. Gli stabilizzatori sono invece dati da: $\mathrm{St}_v = S_4$, mentre $\mathrm{St}_w = \{\mathrm{id}, (13), (24), (13)(24)\}$.

iii. Sia $\sigma := (123) \in S_4$. Si ha $\sigma \circ (13) \circ \sigma^{-1} = (12) \notin \mathrm{St}_w$ e dunque St_w non è normale in S_4.

Esercizio 4. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo finito. Sia $n \in \mathbb{N}^{>0}$ tale che per ogni $x, y \in G$ si abbia:

$$(\star) \qquad (xy)^n = x^n y^n.$$

Siano $G_n := \{x \in G \,|\, x^n = e\}$ e $G^n := \{x^n \,|\, x \in G\}$.

(a) Verificare che G_n e G^n sono sottogruppi di G.

(b) Stabilire se G_n e G^n sono normali.

(c) Sia $\varphi : G \longrightarrow G$, $x \longmapsto x^n$. Dimostrare che φ è un omomorfismo e determinarne nucleo e immagine.

(d) Cosa si può dedurre dal punto c?

Soluzione.

(a) Chiaramente $e \in G^n$ ed $e \in G_n$. Le altre verifiche sono semplici tenendo presente la condizione $(\star)$.

(b) Siano $g \in G$ e $x \in G_n$, $(gxg^{-1} \in G_n \iff (gxg^{-1})^n = e$. Poiché vale $(\star)$, $(gxg^{-1})^n = g^n x^n g^{-n} = e$ e dunque G_n è normale.
Sia ora $x \in G^n$, di nuovo G^n è normale se e solo se $gxg^{-1} \in G^n$ per ogni $g \in G$. Sia $x = t^n$ un elemento di G^n, allora $(gtg^{-1})^n = gt^n g^{-1} = gxg^{-1} \in G^n$ e dunque anche G^n è normale.

(c) Il fatto che φ sia un omomorfismo segue da $(\star)$. $\ker(\varphi) = G_n$ e $\mathrm{Im}(\varphi) = G^n$.

(d) Applicando il Teorema di Omomorfismo si deduce che $G/G_n \cong G^n$.