**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009**
**AL2 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi**
**Esercitazione 6 (19 dicembre 2008)**

**Esercizio 1.** Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{C}$:

$$A := \left\{ \frac{m + n\sqrt{-3}}{2} \,:\, m, n \in \mathbb{Z};\ m \equiv n \mod 2 \right\}.$$

(a) Verificare che $A$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$ contenente $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

(b) Determinare il gruppo $\mathcal{U}(A)$ degli elementi invertibili di $A$.

(c) Verificare che $\mathcal{U}(A)$ è un gruppo ciclico finito e determinarne i suoi generatori.

**Esercizio 2.** Nell'anello degli interi di Gauss, $\mathbb{Z}[i]$ siano $\alpha := 7 + 17i$ e $\beta := -5 + 12i$:

(a) Mostrare che l'ideale $I := \langle \alpha, \beta \rangle$ è principale e determinare un suo generatore.

(b) Stabilire se le classi modulo $I$ degli elementi $\gamma := -10 + 11i$ e $\delta := 3 - 5i$ sono invertibili nell'anello quoziente $A := \mathbb{Z}[i]/I$

(c) Mostrare che $A$ ha un unico ideale proprio non nullo $M$.

(d) Stabilire se $A/M$ è un campo.

**Esercizio 3.** Siano $f(X) := X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 1$, $g(X) := X^3 + X^2 + 2X + 2$ in $\mathbb{Z}_3[X]$.

(a) Mostrare che $I := \langle f(X), g(X) \rangle$ è principale e determinare un suo generatore.

(b) Stabilire se le classi modulo $I$ dei polinomi $h(X) := X^3 + X$ e $k(X) := X^2 + 2X$ sono invertibili nell'anello quoziente $\mathbb{Z}_3[X]/I$.

(c) Determinare gli ideali primi e massimali dell'anello $\mathbb{Z}_3[X]/I$.

**Esercizio 4.** Siano $f(X) := X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$ e $I := (f(X))$.

(a) Mostrare che $K := \mathbb{Z}_3[X]/I$ è un campo e, posto $\alpha := X + I$, esplicitare i suoi elementi in funzione di $\alpha$.

(b) Determinare il sottogruppo ciclico di $(K^*, \cdot)$ generato da $\alpha + 1$ ed elencare i suoi generatori.

**Esercizio 5.** Sia $\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ l'omomorfismo di anelli definito nel seguente modo: se $f \in \mathbb{Q}[X]$:

$$\varphi(f(X)) := (f(2), f(-3)).$$

(a) Trovare nucleo ed immagine di $\varphi$.

(b) Stabilire se l'anello quoziente $\mathbb{Q}[X]/\ker\varphi$ è integro.

(c) Applicare a $\varphi$ il Teorema Fondamentale di Omomorfismo.

**Esercizio 6.** Siano dati gli elementi $\alpha := 9+7i$ e $\beta := 2+10i \in \mathbb{Z}[i]$. Calcolare $\gcd(\alpha, \beta)$ ed una identità di Bézout.

**Soluzione.** Utilizzando l'algoritmo euclideo si ha:

$$\begin{aligned} 9+7i &= (1-i)(2+10i) + (-3-i) \\ 2+10i &= (-2-3i)(-3-i) + (-i-1) \\ -3-i &= (2-i)(-i-1) + 0. \end{aligned}$$

Dunque $\gcd(9+7i, 2+10i) = (i+1)$ ed una identità di Bézout è data da:

$$(i+1) = (2+10i)(4+i) + (9+7i)(-2-3i).$$