Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL2 - Algebra 2
Tutorato 2 - 7 Ottobre 2008
Elisa Di Gloria, Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Sia G un gruppo finito di ordine m, dimostrare le seguenti proprietà:

- $H \leq G$ è l'unico sottogruppo di ordine n (con $n \mid m$) $\Rightarrow H \triangleleft G$;
- $(G : H) = 2 \Rightarrow H \triangleleft G$.

Esercizio 2.
Sia G un gruppo, siano $a, b \in G$ t.c.

- $G =< a, b >$
- $a^4 = 1$ e $b^2 = a^2$
- $bab^{-1} = a^{-1}$

Dimostrare che:

a) G è isomorfo al gruppo dei Quaternioni;

b) Esiste un unico sottogruppo $H \leq G$ di cardinalità 2.

Esercizio 3.
Determinare tutti i sottogruppi, e le loro relative classi destre e sinistre, dei seguenti gruppi. Verificare, inoltre, che le classi laterali formano una partizione del gruppo. Siano:

- $(\mathbb{Z}_{20}, +)$;
- $(U(\mathbb{Z}_{32}), \cdot)$;
- $(D_4, \circ)$.

Esercizio 4.
Dimostrare che i numeri primi generano $\mathbb{Q}^*$.

Esercizio 5.
Determinare tutti i sottogruppi normali di S_3.

Esercizio 6.
Siano G e G' due gruppi e sia $\Phi : G \to G'$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che $ord(\Phi(g))|ord(g)$.

Esercizio 7.
Determinare tutti gli omomorfismi da S_3 in $\mathbb{Z}_4$ e da $\mathbb{Z}_4$ in S_3.

Esercizio 8.
Verificare se le seguenti applicazioni tra gruppi sono omomorfismi e, in caso affermativo, determinarne nucleo e immagine ed applicare il Teorema Fondamentale di Omomorfismo. Quali sono isomorfismi?

- $(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$
  $x \longmapsto e^x$
- $(\mathbb{R}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$
  $x \longmapsto \ln x$
- $(\mathbb{Z}_n, +) \longrightarrow (C_n, \cdot)$
  $z \longmapsto \zeta^z$
- $(\mathbb{C}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$
  $z \longmapsto \frac{z}{|z|}$

Esercizio 9.
Sia H un sottoinsieme di $GL_3(\mathbb{Z})$ definito come

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; 9 \mid a,\ 6 \mid b,\ 4 \mid c \text{ in } \mathbb{Z} \right\}$$

(a) Provare che H è sottogruppo di $GL_3(\mathbb{Z})$;

(b) Sia $\phi : H \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ applicazione t.c $\phi(A) = (a, c)$ $\forall A \in H$,

- Provare che ϕ è un omomorfismo di gruppi;
- Determinare $Ker(\phi)$ e $Im(\phi)$.

Esercizio 10.
Trovare tutti gli omomorfismi **non** banali da $\mathbb{Z}_{20}$ in $\mathbb{Z}_{25}$ e per ciascuno determinare nucleo, immagine e applicare il Teorema Fondamentale di Omomorfismo.