Corso di Algebra 2 della Prof.ssa Tartarone

Tutorato I del $30-09-2008$

Tutori: Elisa Di Gloria, Matteo Acclavio

http://www.matematica3.com

Esercizio 1

Stabilire quali dei seguenti insiemi, con le operazioni di somma e prodotto usuali, sono semigruppi, monoidi o gruppi. Scrivere, eventualmente, quale degli assiomi di gruppo non è soddisfatto.
Siano:

- A={ n^2 | n$\in \mathbb{N}$ }
- B={ $\frac{n^2}{m^2}$ |n,m$\in \mathbb{N}$, m$\neq$0 e MCD(m,n)=1 }

Esercizio 2

Determinare se $(\mathbb{Z}_8, *)$ è un semigruppo, un monoide o un gruppo,
ove $* : \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$ è definita come $a * b := ab - 1$ $\forall$ a,b $\in \mathbb{Z}_8$

Esercizio 3

Dire se $(U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$ è un gruppo ciclico e in caso affermativo determinarne i generatori. Elencare tutti i suoi sottogruppi e stabilire quali di essi sono ciclici.

Esercizio 4

Determinare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}$ contenenti 30

Esercizio 5

Dimostrare che $(\mathbb{Z}_n, +)$ è ciclico e che i suoi generatori sono gli elementi di $U(\mathbb{Z}_n)$

Esercizio 6

Dimostrare che $\mathbb{Z}$ = <p, q> con p,q $\in \mathbb{Z}$ primi tra loro.

Esercizio 7

Sia (G,$*$) un gruppo. Dimostrare che se $\forall$ g $\in$ G g$*$g=1, allora è commutativo.

Esercizio 8

In S_4:

- Si determinino tutti gli elementi di ordine 2 e 3;
- Si descrivano il sottogruppo delle permutazioni pari, A_4, e tutti i suoi sottogruppi;
- Si trovino i generatori del gruppo diedrale D_4;

- Si verifichi che l'insieme V = $\{$id, (1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3)$\}$ è un sottogruppo di S_4 e stabilire l'ordine dei suoi elementi.

  $Facoltativo$:

- Dimostrare che l'insieme delle simmetrie del tetraedro è un gruppo ed è proprio S_4.

Esercizio 9
Verificare che l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}$, con l'operazione di somma, è un gruppo.
Stabilire se è abeliano e dimostrare che non è ciclico.
Stabilire, inoltre, se $<3,X>=<3X>$ e descrivere esplicitamente gli elementi dei due sottogruppi.

Esercizio 10
Determinare i sottogruppi di:

- $(C_{21}, \cdot)$, il gruppo delle radici 21-esime dell'unità;
- $(\mathbb{Z}_{24}, +)$.

Esercizio 11
Dimostrare le seguenti proprietà dei gruppi:

- Dimostrare che se G è abeliano: $exp(G) = |G|$ se e solo se G è ciclico;
- L'intersezione di una famiglia non vuota di sottogruppi di un gruppo G è ancora un sottogruppo di G;
- Se H e K sono due sottogruppi di un gruppo G, allora $H \cup K$ è un sottogruppo di G se e solo se $H \subseteq K$ oppure $K \subseteq H$.