Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL2 - Algebra 2
Tutorato 10/11 15-16 Dicembre 2008
Elisa Di Gloria, Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Sia $a \in \mathbb{C}$ e si consideri l'omomorfismo di anelli

$$v_a : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}, \ f(X) \to f(a)$$

Determinare esplicitamente il nucleo e l'immagine di v_a quando $a = \sqrt[3]{4}$, $a = 3 + 2i$, $a = e$, $a + \sqrt{\pi + 1}$.
In quali casi $Im(v_a)$ è un campo?

Esercizio 2.
Sia $f(X) = X^3 + \bar{3}X + \bar{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$ e sia E l'anello quoziente di $\mathbb{Z}_5[X]$ modulo l'ideale $(f(X))$.
Mostrare che E è un campo che contiene isomorficamente $\mathbb{Z}_5$ e che $f(X)$ ha una radice α in E.
Determinare poi l'inverso di α^2 e di $\alpha + 1$.

Esercizio 3. Sia K un campo e consideriamo l'anello $A = K[X, Y]/(X^2, Y^2)$.

(a) Dette x e y le classi di A determinate da X e Y, provare che ogni elemento di A si può esprimere in un unico modo nella forma:
$axy + bx + cy + d$ con $a, b, c, d \in K$

(b) Calcolare il prodotto tra due elementi di A generici.

(c) Determinare gli zero divisori di A.

(d) Determinare gli invertibili di A.

Esercizio 4.
Si consideri l'insieme $I = \{m + ni | \ m, n \text{ pari}\} \subseteq \mathbb{Z}[i]$.

(a) Dimostrare che I è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Trovare un generatori di I.

(c) Determinare se I è primo.

(d) Determinare se I è massimale.

(e) Determinare gli elementi di $\mathbb{Z}[i]/I$ e stabilire quali sono invertibili e quali sono zero divisori.

Esercizio 5.
Nell'anello dei polinomi $K[X]$ si consideri il polinomio $f(X) = X^2 + X + 1$

(a) Decomporre il polinomio nei casi in cui $K = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{C}, \mathbb{R}$;

(b) Detto I l'ideale generato da $f(X)$, si dica quando $K[X]/I$ è un campo.

Esercizio 6.
Effettuare al divisione euclidea tra $13 + 18i$ e $5 + 3i$.Mostrare che i possibili quozienti (e i rispettivi resti) sono quattro

Esercizio 7.
In $\mathbb{Z}[i]$, sia I un ideale non nullo

- provare che se $\exists a + ib \in I$ t.c. $a^2 + b^2$ è un elemento primo allora I è massimale;
- provare che $I \cap \mathbb{Z}^+$ è non vuoto;
- trovare, a meno di invertibili, i divisori di $1 + 3i$ e $5i$ e il loro MCD. (Suggerimento: usare esercizio 14)

Esercizio 8.
In $\mathbb{Z}[i]$, si considerino gli ideali $I = (7 - i)$ e $J = (2 + 4i)$. Usando la decomposizione in irriducibili dei generatori di tali ideali:

(a) Calcolare $I \cap J$ e $I + J$.

(b) Provare che $I + J$ non è primo.

(c) Provare che I e J sono contenuti in due soli ideali massimali M_1, M_2.

(d) Verificare l'uguaglianza $I + J = M_1 \cap M_2 = M_1 \cdot M_2$.

Esercizio 9.
Un anello A si dice Booleano se $\forall a \in A$ si ha $a^2 = a$. Sia X un insieme.

(a) Provare che $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ è Booleano.

(b) Provare che l'anello delle funzioni $\mathbb{Z}_2^X$ rispetto alla somma e prodotto canonici tra funzioni è Booleano.

(c) Provare che $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ e $\mathbb{Z}_2^X$ sono isomorfi

Esercizio 10.
Effettuare al divisione euclidea tra $13+18i$ e $5+3i$.Mostrare che i possibili quozienti (e i rispettivi resti) sono quattro

Esercizio 11.
Sia A un anello commutativo unitario e $Nil(A)$ l'insieme degli elementi nilpotenti di A

(a) Provare che $Nil(A) \subset Z(A)$ con $Z(A)$ l'insieme degli elementi zerodivisori in A

(b) Provare che $Nil(A)$ e' un ideale (in generale non primo) di A

(c) Provare che $Nil(A)$ e' contenuto in ogni ideale primo di A

(d) Trovare gli elementi di $Nil(A)$ con $A = \mathbb{Z}_{240}, \mathbb{Z}_{36}, \mathbb{Z}_{12}$

Esercizio 12.
Dimostrare che $I = (X)$ e' massimale in $A[X]$ se e soltanto se A è un campo

Esercizio 13.
Stabilire se $I = (X^2, 5X)$ e' principale in $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$

Esercizio 14.
Sia t $\in \mathbb{Z}$ t.c. $|t|$ non ha fattori quadratici, sia $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ $\alpha = a + b\sqrt{t}$ e $N(\alpha) = a^2 - b^2t$. Dimostrare che:

(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$

(b) Provare che $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$

(c) $\alpha \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{t}]) \Leftrightarrow |N(\alpha)| = 1$

(d) α e β sono associati $\Leftrightarrow |N(\alpha)| = |N(\beta)|$

(e) se $|N(\alpha)|$ è un numero primo allora α è irriducibile (ma non vale il viceversa, dare un esempio)

Esercizio 15.
Dimostrare che se x è irriducibile (primo) allora anche tutti i suoi elementi associati sono irriducibili (primi).