Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL2 - Algebra 2
Tutorato 5 - 28 Ottobre 2008
Elisa Di Gloria, Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Gli esercizi proposti qui di seguito fanno parte del primo esonero del 2005/06.

Esercizio 1.
Determinare la decomposizione in cicli disgiunti, l'ordine e la parità della permutazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$$

Esercizio 2.
Siano $\sigma_1, \ \sigma_2, \ \sigma_3, \ \sigma_4, \ \sigma_5, \ \sigma_6 \ \in S_7$, $\sigma_1 = (135)(24)$, $\sigma_2 = (23)(17)(45)$, $\sigma_3 = (273)(14)$, $\sigma_4 = (17)(234)$, $\sigma_5 = (12)$ e $\sigma_6 = (27)(13)(56)$.
Determinare quali fra queste permutazioni sono coniugate in S_7 e trovare due distinte permutazioni che le coniugano.

Esercizio 3.
Determinare i generatori, i sottogruppi ed i gruppi quozienti del gruppo $\mathbb{Z}_{12}$.

Esercizio 4.
Costruire tutti i possibili automorfismi del gruppo delle unità di $\mathbb{Z}_9$.

Esercizio 5.
Determinare almeno un omomorfismo non nullo

$$\varphi : \mathbb{Z}_{18} \longrightarrow \mathbb{Z}_{30}$$

Determinare il nucleo N e l'immagine H di φ e definire l'isomorfismo canonico:

$$\frac{\mathbb{Z}_{18}}{N} \longrightarrow H.$$

Esercizio 6.
Mostrare che l'applicazione
$Re : (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ definita come $Re(a+ib) = a$, per ogni $z = a+ib \in \mathbb{C}$ è un omomorfismo di gruppi. Determinare il nucleo N e l'immagine H di Re e definire l'isomorfismo canonico:

$$\frac{\mathbb{C}}{N} \longrightarrow H.$$

Esercizio 7.
Sia G un gruppo moltiplicativo. Dimostrare che l'applicazione
$\varphi : G \longrightarrow G$ t.c. $\varphi(g) = g^{-1}$ è biiettiva. Dimostrare inoltre che è un isomorfismo se e soltanto se G è commutativo.

Esercizio 5.
Mostrare che l'applicazione di coniugio complesso
$(\mathbb{C}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $z \mapsto \bar{z}$
è un automorfismo di gruppi.
Verificare inoltre che, se ξ è una radice n-esima dell'unità, allora $\overline{\xi^k} = \xi^{n-k}$ per ogni $0 \leq k \leq n-1$.