Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009

AL2 - Algebra 2

Tutorato 8 - 2 Dicembre 2008

Elisa Di Gloria, Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Si consideri l'anello $C := \mathbb{R}[X]/I$, dove I è l'ideale (X^2+1). Trovare l'inverso di $X+I$ in C.

Esercizio 2.
Verificare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi di anelli e determinarne Nucleo ed Immagine:

(a) $\phi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}$ t.c. $\phi(f(X)) = f(0)$;

(b) $\phi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ t.c. $\phi(f(X)) = \overline{f(0)}$;

(c) $\phi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ t.c. $\phi(\sum a_i X^i) = \sum \overline{a_i}$;

(d) $\phi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ t.c. $\phi(f(X)) = f(i)$;

(e) $\phi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\phi(f(X)) = f(\sqrt[3]{2})$;

Esercizio 3. Determinare tutti gli ideali di $\mathbb{Z}_{60}$ e stabilire quali tra essi sono massimali.
Determinare inoltre la struttura degli anelli quoziente $\frac{\mathbb{Z}_{60}}{5\mathbb{Z}_{60}}$ e $\frac{\mathbb{Z}_{60}}{15\mathbb{Z}_{60}}$.
Quanti elementi hanno? Sono integri? Sono campi?

Esercizio 4.
Si consideri l'applicazione $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ t.c. $\phi(a) = ([a]_3, [a]_7)$.
Mostrare che ϕ è un omomorfismo suriettivo di anelli, determinare $Ker\phi$ e applicare il Teorema di Omomorfismo per gli anelli.

Esercizio 5.
Sia $R = A[X]/I$. Stabilire se R è un dominio o un campo per ciascuno dei seguenti casi:

(a) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^2 - 1)$;

(b) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^3 + X + 1)$;

(c) $A := \mathbb{Z}$, $I := (2X^2 + 2)$;

(d) $A := \mathbb{Z}_3$, $I := (X^3 + X + \bar{1})$.

Esercizio 6.
Si consideri l'omomorfismo di anelli $\phi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\phi(f(X)) = f(\sqrt{2})$.

- Determinare $Ker\phi$ e $Im\phi$;
- Dedurne che $X^2 - 2$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[X]$.

Esercizio 7.
Si considerino, nell'anello $\mathbb{Z}[X]$, gli ideali $I = (X^2 + 2X + 2)$ e $J = (X + 2)$.
Provare che:

(a) I e J sono ideali primi, ma non massimali;

(b) $I + J = (X, 2)$;

(c) $M = I + J$ è l'unico ideale massimale contenente I e J;

(d) $\mathbb{Z}[X]/M \cong \mathbb{Z}_2$.