Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL2 - Algebra 2
Tutorato 9 - 9 Dicembre 2008
Elisa Di Gloria, Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Si studi la relazione di inclusione nell'insieme degli ideali degli anelli $\mathbb{Z}_{101}$ e $\mathbb{Z}_{90}$; dire quali fra gli ideali sono massimali e determinare i quozienti relativi a tali ideali massimali

Esercizio 2.
Si consideri la seguente applicazione tra anelli:
$\phi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}[i]$ t.c. $\phi(f(X)) = f(i)$
Verificare se p è un omomorfismo di anelli. Trovare il nucleo, l'immagine.

Esercizio 3. Sia $R = \mathbb{Q}[X]/I$ dove $I := (X^2 - 5X + 6)$. Stabilire se i seguenti elementi di R sono invertibili e, in caso affermativo, calcolarne l'inverso:

$$(X - 1) + I, (X - 3) + I, (2X - 1) + I.$$

Esercizio 4.
Studiare l'anello quoziente $A = \frac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2+aX+\bar{1})}$, determinando per quali valori di $a \in \mathbb{Z}_5$ esso è un campo.
Determinare, inoltre, tutti gli ideali di A nel caso in cui $a = \bar{0}$ e $a = \bar{1}$.

Esercizio 5.
Sia $A = \mathbb{Q}[X]$. Fissato un razionale $q \in \mathbb{Q}$, si consideri l'ideale

$$I_q = \{f(X) \in A \mid f(q) = 0\}$$

(a) Provare che I_q è un ideale massimale di A;

(b) Se q e r sono due numeri razionali distinti, allora $I_q \cap I_r$ è un ideale NON primo di A.

Esercizio 6.
Stabilire se i seguenti ideali di $\mathbb{Z}[X]$ sono primi e/o massimali:

- $(3, X)$;
- $(X^2 - 3X + 2)$;
- $(X^2 - 3)$;
- $(X^2 - 3, 7)$.