

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2009/2010
AL9 - Teoria dei Gruppi - Francesca Tartarone
Esercizi - 23 Ottobre 2009

Esercizio 1. Dimostrare che A_n è l'unico sottogruppo di indice 2 di S_n .

Esercizio 2. Dimostrare che se il centro di G è identico, lo è anche il centro di $\text{Aut}(G)$.

Esercizio 3. Dimostrare che il centro di un gruppo G è contenuto in tutti i sottogruppi massimali di indice composto.

Esercizio 4. Un gruppo non può essere prodotto di due sottogruppi fra loro coniugati.

Esercizio 5. Sia Q il gruppo dei quaternioni, $G = \text{Aut}(Q)$ e $H = I(Q)$. Dimostrare che:

(a) $C_G(H) = H$;

(b) $G/H \cong S_3$;

(c) $G \cong S_4$.

Esercizio 6. Sia $G \subseteq S_4$ con $|G|$ multiplo di 4 e sia $m = |G/G \cap V|$, dove V è il gruppo di Klein. Determinare G nei casi in cui $m = 1, 2, 3, 6$.

Esercizio 7. Se P è un p -sottogruppo di un gruppo G e S è un p -Sylow di G , allora il normalizzatore in P di S è esattamente $P \cap S$.

Esercizio 8. Se $H \subseteq G$ e $\{G_i\}_{i=1}^l$ è una serie normale di G , allora $\{G_i \cap H\}_{i=1}^l$ è una serie normale di H ed i quozienti di questa seconda serie sono isomorfi a sottogruppi dei quozienti della prima serie.