

# AL9 Algebra 9

A.A. 2009/2010

Prof.ssa Francesca Tartarone

## Teoria dei Gruppi

**1. Fondamenti.** Richiami sui gruppi: definizioni, esempi. Gruppi ciclici. Sottogruppi e classi laterali. Indice di un sottogruppo. Cardinalità dei sottogruppi (Teorema di Lagrange). Sottogruppi normali: prime proprietà ed esempi. Quoziente di un gruppo rispetto ad un suo sottogruppo normale: definizione di struttura di gruppo. Permutabilità degli elementi di un prodotto di sottogruppi  $HK$ . Ciclicità dei gruppi finiti che possiedono un solo sottogruppo per ogni divisore dell'ordine. Teoremi di isomorfismo. Numero massimo di generatori di un gruppo finito. Numero massimo di gruppi non isomorfi di cardinalità  $n$  fissata. Gruppo dei quaternioni. Gruppi di ordine 6. Automorfismi di gruppi: esempi. Teorema di Cayley.

La relazione di coniugio in un gruppo. Il gruppo degli automorfismi interni. Il centro di un gruppo  $G$ , il centralizzante di un elemento  $g \in G$ . Relazione fra l'indice del centralizzante di  $g$  e la cardinalità della classe di coniugio di  $g$ . Il coniugio in  $S_n$ . Descrizione delle classi di coniugio attraverso la struttura ciclica dei rappresentanti e calcolo della loro cardinalità. Normalizzanti, classi di coniugio e centralizzanti di un sottogruppo  $H$  di un qualsiasi gruppo  $G$ . Esempi. Centralizzante e normalizzante del sottogruppo generato da un  $n$ -ciclo in  $S_n$ . Il coniugio per le involuzioni.

Prodotti diretti e semidiretti di gruppi. Limiti inversi e diretti di gruppi.

Generatori e relazioni. Sistemi di generatori e gruppi finitamente generati. Sottogruppo di Frattini di un gruppo  $G$  e sottogruppi massimali. Sottogruppo di torsione di un gruppo abeliano. Struttura dei gruppi abeliani finitamente generati. Come risalire da una presentazione finita di un gruppo abeliano alla sua struttura di somma diretta di gruppi ciclici. Gruppi proiettivi. Un gruppo libero è proiettivo. Gruppi iniettivi e divisibili (teorema di equivalenza).

## 2. $p$ -Gruppi e Teoremi di Sylow.

Prime proprietà sui  $p$ -gruppi. Esempi. Teorema di Cauchy. Il centro di un  $p$ -gruppo. Gruppi di cardinalità  $p^2$ . Invertire il Teorema di Lagrange per i  $p$ -gruppi. Primo, secondo e terzo Teorema di Sylow. Esempi e applicazioni. Relazioni fra i Sylow di un gruppo  $G$  e quelli di un suo sottogruppo. Esempi e applicazioni. Classificazione dei gruppi di ordine 12.  $A_5$  l'unico gruppo semplice di ordine 60 ed anche l'unico gruppo di ordine 60 con 6 5-Sylow.

Azioni: stabilizzatore, orbita, azioni transitive. Azione di un gruppo  $G$  sui laterali di un sottogruppo  $H$ . Applicazioni ai  $p$ -gruppi. Formula di Burnside. Caratteri: definizione, prime proprietà ed esempi (colorazione di un quadrato).

### 3. Serie normali. Gruppi nilpotenti e risolubili.

Teorema di Jordan-Holder sull'unicità di una serie di composizione. Esempi.

Gruppi semplici. Serie normali e serie di composizione di un gruppo. Gruppi di permutazioni: semplicità del gruppo alterno  $A_n$  per  $n \neq 4$ . Automorfismi di  $S_n$ .

Gruppi nilpotenti e gruppi  $p$ -nilpotenti ( $p$ -complementi di un gruppo). Derivato di un gruppo. Serie derivata. Serie centrali di gruppi. Gruppi risolubili: definizione e primi esempi. Un  $p$ -gruppo finito è risolubile.

Sottogruppi normali minimali di un gruppo risolubile e relazioni con il sottogruppo di Fitting. Serie di Fitting di un gruppo risolubile. Teorema di Hall. Ogni gruppo risolubile ha una base di Sylow.

Il problema della coomologia di un gruppo: cenni.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] ANTONIO MACHÌ, *Gruppi. Una introduzione a idee e metodi della Teoria dei Gruppi*. SPRINGER VERLAG, (2007).  
[2] MICHAEL ARTIN, *Algebra*. Bollati-Boringhieri, (1997).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

Per la valutazione sono previsti una serie di seminari che saranno esposti dagli studenti stessi ed il cui contenuto farà parte del programma di esame.